

## ÇA ALORS... SUITE

### OBJECTIFS

- A partir d'une situation dynamique faire appréhender les concepts de suite récurrente et suite convergente
- Susciter le comportement de recherche devant un fait mathématique
- Affiner les moyens d'expression, codage, tableaux, arbre.
- Utiliser une calculatrice programmable.

“Vous n'avez besoin que d'un crayon, d'une feuille de papier et de curiosité.

Vous prenez un nombre de 4 chiffres non tous identiques”.

6808 convient, 8888 ne convient pas.

1) On forme avec les chiffres du nombre choisi, placés dans l'ordre décroissant, un nouveau nombre :

8860

2) Avec les mêmes chiffres, placés dans l'ordre croissant des nombres qu'ils représentent, on forme un nouveau nombre :

0688

3) On retranche le second nombre du premier :

$$8860 - 0688 = 8172$$

4) Avec 8172, on reprend la même procédure.

Résumons

$$\begin{array}{r}
 8860 \\
 - 0688 \\
 \hline
 8172
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 8721 \\
 - 1278 \\
 \hline
 7443
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 7443 \\
 - 3447 \\
 \hline
 3996
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 9963 \\
 - 3699 \\
 \hline
 6264
 \end{array}$$

— “A vous de jouer maintenant. Choisissez un nombre (si possible différent de 6808). Faites les calculs”.

— “Jusqu'où, Monsieur” ? — “Combien de soustractions, Monsieur ?”.

— “Ne vous préoccupez pas de cela, faites les calculs !”

— “Qu'est-ce que c'est que ça ? je trouve toujours 6174”.

— “Ça alors, moi aussi, et pourtant on n'est pas parti du même nombre”...

— “Vous venez d'obtenir des suites de nombres”.

Ainsi

$$\begin{array}{ccccccccc}
 6808 & & 8172 & & 7443 & & 3996 & & 6264 & & 4176 & & 6174
 \end{array}$$

Ces nombres sont les termes d'une suite. Chacun d'eux a un rang qui dépend du rang de celui qui le précède. Par exemple on adopte souvent la notation suivante :

$$u_0 = 6808 \quad u_1 = 8172 \quad u_2 = 7443 \dots \quad u_6 = 6174 \quad u_7 = 6174 \text{ etc.}$$

- “Au bout de combien de soustractions avez-vous obtenu 6174 ?”
- “3,2,6,4,13,1...”
- “Celui qui en a obtenu 13 a fait une erreur de calcul”.

L'élève recompte et trouve effectivement son erreur.

Finalement personne ne trouve plus de sept soustractions, ce qui signifie que toutes ces suites ont au plus huit termes.

— “Vous constatez qu'à partir d'un certain rang, on trouve toujours 6174. On dit que la suite converge vers 6174”.

Certains élèves sont intrigués par ces deux faits :

- la convergence vers 6174
- le nombre de termes différents, nombre qui semble être au plus huit.

Pour répondre à leurs questions, on peut procéder ainsi :

$$\text{Soit le nombre } \left\{ \begin{array}{l} \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d \\ a \geq b \geq c \geq d \\ a \neq d \end{array} \right.$$

$$\text{On a : } \overline{abcd} - \overline{dcba} = 999(a-d) + 90(b-c)$$

Donc le calcul se fait facilement en considérant le couple  $(a-d), (b-c)$

8860 donne 8172, soit, en ordonnant, 8721.

Au couple  $(8,2)$  ;  $8=8-0$  ;  $2=8-6$ , correspond le couple  $(7,5)$ ,  $7=8-1$  ;  $5=7-2$ .

Posons  $A = a-d$ ,  $B = b-c$  ; on peut définir une fonction  $f$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} [1,9] \times [0,9] \mapsto [1,9] \times [0,9] \\ (A, B) \mapsto (A', B') \\ A \geq B \end{array} \right.$$

Chaque case  $(A,B)$  du tableau 1 contient le *nombre* obtenu, en classant par ordre décroissant, les naturels représentés par les chiffres de  $999A + 90B$  et le *couple*  $(A', B')$  correspondant. La construction de ce tableau est facilitée si on utilise une calculatrice programmable dans laquelle on programme la fonction :  $(A,B) \mapsto 999A + 90B$ .

Avec une TI58 ou une TI59, on obtient le programme (P) où l'on rentre les valeurs de la variable A en A et celles de la variable B en B.

```

LRN
000 76 LBL
001 11 R
002 42 STD
003 00 00
004 91 R/S
005 76 LBL
006 12 B
007 42 STD
008 01 01
009 09 9
010 09 9
011 09 9
012 65 x
013 43 RCL
014 00 00
015 85 +
016 09 9
017 00 0
018 65 x
019 43 RCL
020 01 01
021 95 =
022 91 R/S

```

**Exemple :**

pour 6808 , A = 8 , B = 2.

A la calculatrice on frappe  
8,A,2,B ; elle donne 8172.

Au couple (8,2) correspond donc  
le couple (7,5)

TABLEAU 1

A \ B	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	(9,0) 9990	(8,1) 9981	(7,2) 9972	(6,3) 9963	(5,4) 9954	(5,4) 9954	(6,3) 9963	(7,2) 9972	(8,1) 9981
1	(9,7) 9810	(8,6) 8820	(8,4) 8730	(8,2) 8640	(8,0) 8550	(8,2) 8640	(8,4) 8730	(8,6) 8820	(9,7) 9810
2	(8,6) 9711	(7,5) 8721	(6,4) 7731	(6,2) 7641	(6,0) 7551	(6,2) 7641	(6,4) 7731	(7,5) 8721	(8,6) 9711
3	(8,4) 9621	(6,4) 8622	(5,3) 7632	(4,2) 6642	(4,0) 6552	(4,2) 6642	(5,3) 7632	(6,4) 8622	(8,4) 9621
4	(8,2) 9531	(6,2) 8532	(4,2) 7533	(3,1) 6543	(2,0) 5553	(3,1) 6543	(4,2) 7533	(6,2) 8532	(8,2) 9531
5	(8,0) 9441	(6,0) 8442	(4,0) 7443	(2,0) 6444	(1,1) 5544	(2,0) 6444	(4,0) 7443	(6,0) 8442	(8,0) 9441
6	(8,2) 9531	(6,2) 8532	(4,2) 7533	(3,1) 6543	(2,0) 5553	(3,1) 6543	(4,2) 7533	(6,2) 8532	(8,2) 9531
7	(8,4) 9621	(6,4) 8622	(5,3) 7632	(4,2) 6642	(4,0) 6552	(4,2) 6642	(5,3) 7632	(6,4) 8622	(8,4) 9621
8	(8,6) 9711	(7,5) 8721	(6,4) 7731	(6,2) 7641	(6,0) 7551	(6,2) 7641	(6,4) 7731	(7,5) 8721	(8,6) 9711
9	(9,7) 9810	(8,6) 8820	(8,4) 8730	(8,2) 8640	(8,0) 8550	(8,2) 8640	(8,4) 8730	(8,6) 8820	(9,7) 9810

On notera, dans le tableau(1), les “symétries” intéressantes, les axes de symétrie étant matérialisés par des lignes en pointillé.

On peut dès lors réduire le tableau(1) aux tableaux 2 et 3.

Tableau 2

	A	1	2	3	4	5
B		9	8	7	6	
0		(9,0)	(8,1)	(7,2)	(6,3)	(5,4)

Tableau 3

	A	1	2	3	4	5
B		9	8	7	6	
1	9	(9,7)	(8,6)	(8,4)	(8,2)	(8,0)
2	8	(8,6)	(7,5)	(6,4)	(6,2)	(6,0)
3	7	(8,4)	(6,4)	(5,3)	(4,2)	(4,0)
4	6	(8,2)	(6,2)	(4,2)	(3,1)	(2,0)
5		(8,0)	(6,0)	(4,0)	(2,0)	(1,1)

A l'aide de ces deux tableaux, on peut construire un arbre montrant qu'un cheminement de couple en couple conduit inexorablement au couple (6,2). Cela établit la convergence de la suite et le fait que chaque suite a huit termes au plus.

Voici une petite partie de l'arbre :

