

Método Simplex na TI-59

Norman Gillmore

Vamos apresentar um programa, aplicado a calculadoras TI-59, que utiliza o Método Simplex. Seu objetivo é facilitar a vida de usuários potenciais que ainda não têm acesso a computadores, pequenos ou grandes, e que não desejam perder tempo com cálculos manuais.

O método Simplex resolve o problema geral da programação linear — bastante utilizada nas áreas científica e de negócios — que consiste na busca do ótimo (mínimo ou máximo) de uma função linear (função-objetivo) de m variáveis $x_j (j = 1, 2, \dots, m)$, ligada por n relações lineares (equações ou inequações) chamadas **restrições verdadeiras**. Outra espécie de restrição é a condição de não negatividade ($x_j \geq 0$) ou de não positividade ($x_j \leq 0$) das variáveis envolvidas. É sempre possível supor que algumas das inequações podem ser multiplicadas por -1 , para que todas elas tenham o mesmo sentido (por exemplo, ≥ 0).

A tradução algébrica desta definição é, então, a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{max. (ou min.) } z &= \sum_{j=1}^m c_j x_j \\ r_i &\geq \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \quad (i=1, 2, \dots, p) \\ r_i &= \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \quad (i=(p+1), \dots, n) \\ 0 &\leq x_j \quad (j=1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

onde

z = função objetivo

c_j = coeficiente de decisão j

r_i = valor da restrição i

a_{ij} = coeficiente de utilização

da restrição i por unidade

da variável x_j

COMENTÁRIOS

As explicações teóricas são concisas, dirigidas a possíveis usuários que já conheçam o Método Simplex. Desta forma, atenção maior será dada às instruções de uso do programa (1).

A partição da calculadora é a normal (479.59). Como a

memória da TI-59 é pequena, o tamanho dos problemas que nela podem ser resolvidos está limitado a:

$$(n+1)(m+1) \leq 49$$

, onde o primeiro fator é o número de restrições (n), mais a fila correspondente aos critérios de seleção ($r_j - c_j$); o segundo fator é o número de variáveis consideradas (m) acrescido da coluna correspondente aos valores das variáveis que entram na solução do problema (P_1 nos exemplos).

O número máximo de dados individuais que podem ser introduzidos é 49. Se um problema de maximização exceder essa capacidade, os vetores-coluna das variáveis de folga podem ser omitidos. A solução ótima será sempre encontrada, mas o mesmo não ocorrerá com o inverso da matriz e com a solução do problema dual implícito, os quais nem sempre são necessários. Por outro lado, os problemas de minimização sempre podem ser transformados em problemas de maximização, o que evita a utilização de variáveis artificiais e permite a aplicação das considerações anteriores.

O programa possibilita o cálculo de problemas de máximos ou de mínimos condicionados, sendo suas soluções limitadas ao campo dos números positivos ($x_j \geq 0$). Além disso, permite parametrizar alguma das restrições, isto é, considerar uma restrição como se fosse uma variável.

Para tal, basta igualar a zero o valor r correspondente a uma restrição i qualquer na solução inicial. Em cada iteração, o valor da variável de folga referente a esta restrição será negativo; seu valor absoluto, para cada iteração, indica que, se esta fosse a disponibilidade r da mesma restrição, a solução seria ótima, posto que sua disponibilidade haveria se esgotado. Portanto, cada iteração representa um ótimo. Na iteração final, o valor absoluto encontrado indica o valor crítico da restrição, acima do qual a solução deixa de ser ótima do ponto de vista da restrição (existiria folga dela).

PASSO A PASSO

Como elementos de apoio ao programa temos: um conjunto de instruções para sua utilização (figura 1), exemplos de maximização (figuras 2 e 3) e de minimização (figuras 4 e 5).

De acordo com as instruções de utilização apresentadas na figura 1, após introduzir o programa na calculadora, o primeiro passo é a entrada de dados (passo 1). Estes podem ser recuperados para controle (passos 2 e 3) e eventual correção de erros (passo 4). Os passos 2 e

PASSO	PROCEDIMENTO	INTRODUIR	TECLA	VISOR
1	ENTRADA DE DADOS			
1.a	Limpar memória		2nd CMA	
1.b	Posicionamento para entrada de dados		2nd A	
1.c	Entrar número de filas	n+1	R/S	n+1
1.d	Entrar número de colunas	m+1	R/S	0
1.e	Entrar os dados por fila, começando pelo término independente e logo os coeficientes das variáveis. A fila dos valores $z_j - c_j$ deve ser a última			
	Entrar r_1	r_1	R/S	Nº do dado seguinte
	Entrar a_{1m}	a_{1m}	R/S	" "
	Entrar r_n	r_n	R/S	" "
	Entrar a_{nm}	a_{nm}	R/S	" "
	Entrar Z	Z	R/S	" "
	Entrar $z_1 - c_1$	$z_1 - c_1$	R/S	" "
	Entrar $z_m - c_m$	$z_m - c_m$	R/S	" "
2	RECUPERAÇÃO CONSECUTIVA DE DADOS			
2.a	. Dado da 1ª fila, 1ª coluna		2nd B	r_1
2.b	. Dado da 2ª fila, 2ª coluna		R/S	a_{11}
2.c	. Repetir 2.b as vezes que forem necessárias. Antes de aparecer o dado, o visor piscará a fila e a coluna correspondentes.			
	. Fim dos dados		R/S	99
3	RECUPERAÇÃO DE UM DADO PARTICULAR			
3.a	Entrar número da fila	Nº da Fila	STO 01	Nº da Fila
3.b	Entrar número da coluna	Nº da coluna	STO 02	Nº da coluna
3.c	Apertar		SBR	
3.d	Dado seguinte (apertar R/S as vezes que forem necessárias)		2nd D.MS	dado
			R/S	
4	CORREÇÃO DE ERROS DE ENTRADA (depois do Passo 2b ou do 3.c)			
	Entrar dado certo	dado certo	STO 00	dado certo
			2nd IND	

PASSO	PROCEDIMENTO	INTRODUIR	TECLA	VISOR
5	COMPUTAÇÃO COMPLETA			
5.a	Iniciar			RST E
5.b	. Para obter programação paramétrica (para anular este Passo repetir 5.a e pular 5.b)			2nd StFlg3
5.c	Selecionar rotina Maximização: Qualquer número positivo Minimização: Qualquer número negativo		N>0 N<0	R/S R/S
5.d	Fim da rotina completa			7
5.e	Número de Iterações (t) (Para recuperar dados da solução, executar o Passo 2 ou 3)			RCL 07 t
6	COMPUTAÇÕES PARCIAIS			
6.a	Selecionar rotina: Maximização (não fazer nada) Minimização			RST
6.b	Para obter programação paramétrica (para anular este Passo repetir 6.a e pular 6.b)			2nd StFlg2
6.c	Escolha da Variável que Entra na Base Fim da sub-rotina coluna (1) correspondente à variável			A 9
6.d	Escolha da Variável (k) que sai da Base Fim da sub-rotina Fila (k) correspondente à variável			RCL 05 L
6.e	Cálculo dos Valores da Nova Fila de Base Fim da sub-rotina (Usar Passo 3 para eventual recuperação de dados.) Introduzir k em 3.a e 1 em 3.b			RCL 08 K
6.f	Cálculo dos Valores do Resto das Filas Início da sub-rotina Fim da sub-rotina (Usar Passo 2 para recuperação de dados)			C 9
6.g	Repetir os Passos 6.c a 6.f, até obter o ótimo procurado			D

Figura 1 - Instruções de utilização

FILA	COLUNA	1	2	3	4	5	6	7
		SOLUÇÃO	VARIÁVEIS REAIS			VARIÁVEIS DE FOLGA		
C _j	VAR.	P ₁	X ₁	X ₂	X ₃	f ₁	f ₂	f ₃
1 0	f ₁	30	1	3	2	1	0	0
2 0	f ₂	40	2	2	2	0	1	0
3 0	f ₃	15	1	2	2	0	0	1
4	$Z_j - c_j$	0	-1	-2	-3	0	0	0

Figura 2 - Exemplo de maximização (primal) - Solução inicial

3 servem também para recuperar os dados da solução ótima. Quem possuir impressora, pode substituir as duas instruções PAUSE e a instrução R/S da sub-rotina D.MS (2nd Lb, 2nd D.MS) pela instrução PRT (2nd PRT).

A partir dai procede-se a computação. Desejando-a completa (passo 3), a calculadora trabalhará até encontrar o ótimo. Para cálculos parciais (passo 6), a calculadora processará, passo a passo, as diversas etapas de cada iteração.

FILA	COLUNA	SOLUÇÃO	VARIÁVEIS REAIS			VARIÁVEIS DE FOLGA			VARIÁVEIS DE FOLGA		
			P ₁	X ₁	X ₂	X ₃	f ₁	f ₂	f ₃		
1 0	f ₁	15		0	1	0	1	0	-1		
2 0	f ₂	25		1	0	0	0	1	-1		
3 3	f ₃	7,5		0,5	1	1	0	0	0	0,5	
4	$Z_j - c_j$	22,5		0,5	1	0	0	0	0	1,5	

Iterações : 1
Tempo : 7 minutos

Figura 3 - Exemplo de maximização - Solução ótima

FILA	COLUNA	SOLUÇÃO	VARIÁVEIS REAIS			VARIÁVEIS DE FOLGA			VARIÁVEIS ARTIFICIAIS			
			P ₁	w ₁	w ₂	w ₃	f ₁	f ₂	f ₃	a ₁	a ₂	a ₃
1 M	a ₁	1	1	2	1	-1	0	0	1	0	0	0
2 M	a ₂	2	3	2	2	0	-1	0	0	1	0	0
3 M	a ₃	3	2	2	2	0	0	-1	0	0	0	1
4	$Z_j - c_j$	6M	-30	-40	-5M	-15	-M	-M	-M	0	0	0

Obs.: Os coeficientes M das variáveis artificiais foram considerados com um valor M=9⁹ (9 x 9)

Figura 4 - Exemplo de minimização (dual) - Solução inicial

P F L I A	C J	VAN.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
			SOLUÇÃO			VARIÁVEIS REAIS			VARIÁVEIS DE FOLGA			VARIÁVEIS ARTIFICIAIS		
			P ₁	W ₁	W ₂	W ₃	f ₁	f ₂	f ₃	a ₁	a ₂	a ₃		
1	15	W ₃	1.5	1	1	1	0	0	-0.5	0	0	0.5		
2	0	F ₁	0.5	0	-1	0	1	0	-0.5	-1	0	0.5		
3	0	F ₂	1	-1	0	0	0	1	-1	0	-1	1		
4	-	Z _j - C _j	22.5	-15	-25	0	0	0	-7.5	-387.4 _{10^6}	-387.4 _{10^6}	-387.4 _{10^6}		

Iterações : 5
Tempo : 35 minutos

Figura 5 - Exemplo de minimização - Solução ótima.

(1) - Para uma explicação aprofundada dos conceitos, ver M. Simonnard, "Programation Linéaire"; Dunod, Paris (versão francesa) ou Paraninfo, Madrid, 1972 (versão espanhola).

Norman A. Gillmore é engenheiro, formado pela Universidade Católica do Chile e fez Mestrado em Economia na Universidade da Pennsylvania, EUA. Trabalhou durante 14 anos na Comissão Econômica para a América Latina (CEPAL) e atualmente é Consultor Técnico da Empresa Brasileira de Planejamento de Transportes-GEIPTOT.

000	76	2nd Lbl	080	09	9	160	09	09	240	43	RCL	320	08	08	400	70	2nd Rad
001	15	E	081	54)	161	43	RCL	241	09	09	321	32	x=t	401	43	RCL
002	86	2nd St Flg	082	42	STO	162	02	02	242	54)	322	43	RCL	402	04	04
003	01	01	083	00	00	163	42	STO	243	66	2nd Pause	323	01	01	403	32	x=t
004	00	0	084	73	RCL 2nd Ind	164	05	05	244	22	INV	324	67	2nd x=t	404	43	RCL
005	32	x=t	085	00	00	165	76	2nd Lbl	245	77	2nd x=t	325	89	*	405	01	01
006	91	R/S	086	92	INV SBR	166	58	2nd Fix	246	25	CLR	326	76	2nd Lbl	406	67	2nd x=t
007	22	INV	087	76	2nd Lbl	167	69	2nd Op	247	76	2nd Lbl	327	69	2nd Op	407	66	2nd Pause
008	77	2nd x=t	088	53	{	168	22	22	248	24	CE	328	43	RCL	408	69	2nd Op
009	49	Prd	089	43	RCL	169	43	RCL	249	69	2nd Op	329	05	05	409	21	21
010	11	A	090	03	03	170	01	01	250	21	21	330	48	2nd Exc	410	01	1
011	76	2nd Lbl	091	32	x=t	171	66	2nd Pause	251	61	GTO	331	02	02	411	42	STO
012	16	2nd A	092	43	RCL	172	43	RCL	252	22	INV	332	42	STO	412	02	02
013	91	R/S	093	02	02	173	02	02	253	76	2nd Lbl	333	05	05	413	61	GTO
014	42	STO	094	67	2nd x=t	174	66	2nd Pause	254	25	CLR	334	71	SBR	414	68	2nd Nop
015	04	04	095	91	R/S	175	61	GTO	255	42	STO	335	44	SUM	415	76	2nd Lbl
016	91	R/S	096	69	2nd Op	176	45	y ^x	256	06	06	336	42	STO	416	54)
017	42	STO	097	22	22	177	76	2nd Lbl	257	43	RCL	337	06	06	417	22	INV
018	03	03	098	92	INV SBR	178	55	*	258	01	01	338	43	RCL	418	87	2nd IfFlg
019	01	1	099	76	2nd Lbl	179	61	GTO	259	42	STO	339	05	05	419	01	01
020	00	0	100	91	R/S	180	58	2nd Fix	260	08	08	340	48	2nd Exc	420	28	2nd log
021	42	STO	101	43	RCL	181	76	2nd Lbl	261	61	GTO	341	02	02	421	00	0
022	00	00	102	04	04	182	12	B	262	24	CE	342	42	STO	422	32	x=t
023	00	0	103	32	x=t	183	01	1	263	76	2nd Lbl	343	05	05	423	43	RCL
024	91	R/S	104	43	RCL	184	42	STO	264	13	C	344	76	2nd Lbl	424	09	09
025	76	2nd Lbl	105	01	01	185	01	1	265	43	RCL	345	80	2nd Grad	425	67	2nd x=t
026	33	x ²	106	77	2nd x=t	186	53	{	266	08	08	346	43	RCL	426	71	SBR
027	72	STO 2nd Ind	107	28	2nd log	187	09	09	267	42	STO	347	08	08	427	12	B
028	00	00	108	69	2nd Op	188	45	y ^x	268	01	01	348	48	2nd Exc	428	76	2nd Lbl
029	69	2nd Op	109	21	21	189	09	9	269	43	RCL	349	01	01	429	23	Lnx
030	20	20	110	01	1	190	54)	270	05	05	350	42	STO	430	22	INV
031	53	{	111	42	STO	191	42	STO	271	42	STO	351	08	08	431	87	2nd IfFlg
032	43	RCL	112	02	02	192	06	06	272	02	02	352	71	SBR	432	01	1
033	00	00	113	61	GTO	193	76	2nd Lbl	273	71	SBR	353	44	SUM	433	28	2nd log
034	75	-	114	88	2nd D.Ms	194	22	INV	274	44	SUM	354	42	STO	434	13	C
035	09	9	115	76	2nd Lbl	195	43	RCL	275	42	STO	355	09	09	435	76	2nd Lbl
036	54	1	116	28	2nd log	196	01	01	276	59	59	356	43	RCL	436	96	2nd Write
037	91	R/S	117	09	9	197	66	2nd Pause	277	01	1	357	08	*	437	22	INV
038	61	GTO	118	91	R/S	198	43	RCL	278	42	STO	358	48	2nd Exc	438	87	2nd IfFlg
039	33	x ²	119	76	2nd Lbl	199	04	04	279	02	02	359	01	01	439	01	1
040	76	2nd Lbl	120	11	A	200	32	x=t	280	76	2nd Lbl	360	42	STO	440	28	2nd log
041	17	2nd B	121	43	RCL	201	43	RCL	281	81	RST	361	08	08	441	14	D
042	24	CE	122	04	04	202	01	01	282	43	RCL	362	43	RCL	442	76	2nd Lbl
043	01	1	123	66	2nd Pause	203	67	2nd x=t	283	01	01	363	01	01	443	66	2nd Pause
044	42	STO	124	42	STO	204	23	Lnx	284	66	2nd Pause	364	66	2nd Pause	444	22	INV
045	01	01	125	01	01	205	43	RCL	285	43	RCL	365	43	RCL	445	87	2nd IfFlg
046	42	STO	126	02	2	206	05	05	286	02	02	366	02	02	446	01	1
047	02	02	127	42	STO	207	42	STO	287	66	2nd Pause	367	66	2nd Pause	447	28	2nd log
048	76	2nd Lbl	128	02	02	208	02	02	288	71	SBR	368	71	SBR	448	69	2nd Op
049	88	2nd D.Ms	129	66	2nd Pause	209	00	00	289	44	SUM	369	44	SUM	449	27	27
050	43	RCL	130	00	0	210	32	x=t	290	53	{	370	53	{	450	11	A
051	01	01	131	42	STO	211	71	SBR	291	24	CE	371	24	CE	451	76	2nd Lbl
052	66	2nd Pause	132	09	09	212	44	SUM	292	55	i	372	75	-	452	71	SBR
053	43	RCL	133	76	2nd Lbl	213	67	2nd x=t	293	43	RCL	373	43	RCL	453	22	INV
054	02	02	134	45	y ^x	214	24	CE	294	59	59	374	09	09	454	86	2nd StFlg
055	66	2nd Pause	135	53	{	215	22	INV	295	54)	375	65	X	455	01	1
056	71	SBR	136	43	RCL	216	77	2nd x=t	296	72	STO 2nd Ind	376	43	RCL	456	22	INV
057	44	SUM	137	03	03	217	24	CE	297	00	00	377	06	06	457	86	2nd StFlg
058	91	S/R	138	85	+	218	42	STO	298	66	2nd Pause	378	54)	458	02	2
059	71	SBR	139	01	1	219	09	09	299	43	RCL	379	72	STO 2nd Ind	459	07	7
060	53	{	140	54)	220	01	1	300	03	03	380	00	00	460	91	R/S
061	88	2nd D.Ms	141	32	x=t	221	42	STO	301	32	x=t	381	66	2nd Pause	461	76	2nd Lbl
062	76	2nd Lbl	142	43	RCL	222	02	02	302	43	RCL	382	43	RCL	462	49	2nd Prd
063	44	SUM	143	02	02	223	71	SBR	303	02	02	383	03	03	463	86	2nd StFlg
064	53	{	144	67	x=t	224	44	SUM	304	67	2nd x=t	384	32	x=t	464	02	2
065	53	{	145	54)	225	67	2nd x=t	305	96	2nd Write	385	43	RCL	465	11	A
066	53	{	146	43	RCL	226	32	x=t	306	69	2nd Op	386	02	02	466	76	2nd Lbl
067	43</																