divisez sur votre TI-57: à la recherche du PGCD

Le précédent article proposait d'établir la liste des diviseurs d'un entier a en le divisant par tous ceux qui lui sont inférieurs (ex. n° 7), puis d'améliorer ce programme (ex. n° 8). Après avoir vu des solutions possibles, nous nous attaquerons au calcul de PGCD de deux entiers sur TI-57.

Solution de l'exercice n° 7

Affichage		Touches
Pas	Codes	
00	32 0	STO 0
01	32 1	STO 1
02	86 0	Lbl 0
03	33 1	RCL 1
04	45	÷
05	33 0	RCL 0
06	85	=
07	32 2	STO 2
08	49	Int
09	22	x⇌t
10	33 2	RCL 2
11	-66	INV x=t
12	51 1	GTO 1
13	33 0	RCL 0
14	36	Pause
15	66 1	Lbl 1
16	56	Dsz
17	51 0	GTO 0
18	81	R/S
19	71	RST

Registres	
R0	a
R1	d
R2	q = a : d
R7	0 ou INT (q)

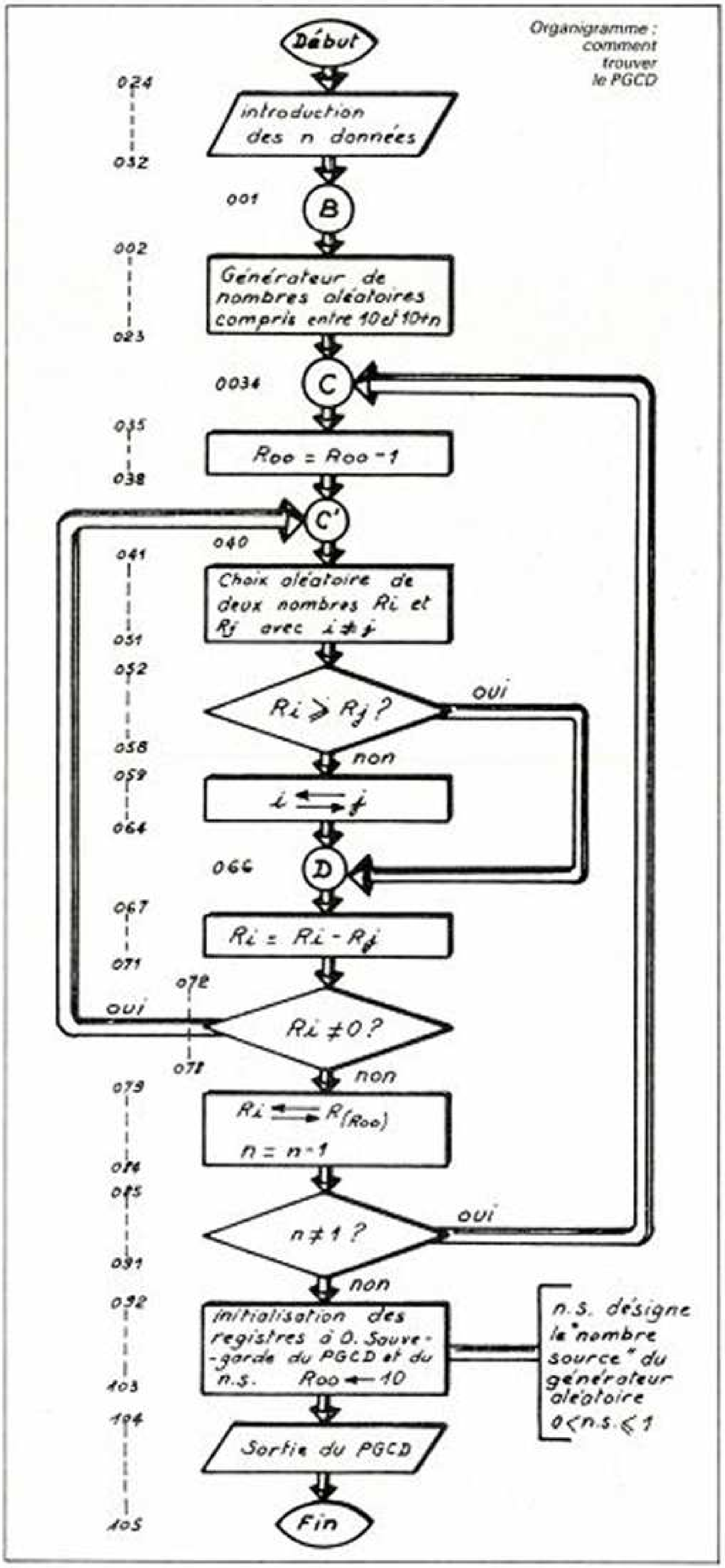
Mode d'emploi			
N°	Instructions ou données	Touches	Affichage
01	Passer en mode « programme »	LRN	
02	Introduire le programme	......	......
03	Passer en mode « calcul »	LRN	
04	Initialiser le pointeur	RST	0.
05	Introduire a≠0	R/S	a. puis la liste
06	Pour un autre calcul, aller en 05		

Les remarques du précédent article permettent d'écrire facilement le programme de l'ex. n° 8. La solution proposée est organisée de la façon suivante :

01 'Liste des diviseurs de a
02 'Liste des diviseurs de a
03 LIRE A
04 D←0 ; 'D=diviseur
09 'Divisions par D
10 D←D+1 ; Q←A:D
12 SI Q≠INT(Q) ALORS ALLER EN 20
14 AFFICHER D ; AFFICHER Q
19 'Test d'arrêt
20 SI $\sqrt{A}$ < INT(Q) ALORS ALLER EN 10
22 TERMINER

(' indique un commentaire)

Registres	
R0	a
R1	$\sqrt{a}$
R2	d
R3	q
R7	INT (q)



Organigramme : comment trouver le PGCD

Ce programme s'utilise comme le précédent.

Affichage		Touches
Pas	Codes	
00	32 0	STO 0
01	24	$\sqrt{x}$
02	32 1	STO 1
03	00	0
04	32 2	STO 2
05	86 1	Lbl 1
06	01	1
07	34 2	SUM 2
08	33 0	RCL 0
09	45	:
10	33 2	RCL 2
11	85	=
12	32 3	STO 3
13	49	Int
14	22	$x \leftrightarrows t$
15	33 3	RCL 3
16	-66	INV $x=t$
17	51 2	GTO 2
18	36	Pause
19	33 2	RCL 2
20	36	Pause
21	86 2	Lbl 2
22	33 1	RCL 1
23	-76	INV $x \geqslant t$
24	51 1	GTO 1
25	15	CLR
26	81	R/S
27	71	RST

Connaissez-vous le PGCD de deux entiers ?

C'est leur Plus Grand Commun Diviseur. Par exemple, on a PGCD (12;32)=4. Nous vous proposons d'écrire trois programmes différents pour calculer le PGCD de deux entiers a et b.

I. On calcule un diviseur de a et on cherche s'il est aussi un diviseur de b. Si oui, on affiche ce nombre si l'on s'est assuré que c'est bien le plus grand.

Ex. n° 9 : écrivez un programme qui calcule le PGCD de deux entiers par cette méthode.

Remarquez qu'il vaut mieux rechercher les diviseurs du plus petit des deux nombres, afin de minimiser le nombre d'opérations.

II. Si on désigne le plus grand des deux nombres dont on cherche le PGCD, on a aussi : PGCD(a;b) = PGCD (a;a-b) : nouvel algorithme de calcul :

```
10 'PGCD(A,B)
11 ..........
12 '
13 LIRE A ; LIRE B
14 SI A>B ALORS A←A-B ;
   ALLER EN 14
15 SI A≠B ALORS A⇆B ;
   ALLER EN 14
16 '
20 AFFICHER B
21 TERMINER
```

Ex. n° 10 : écrivez un programme qui calcule le PGCD de deux entiers par soustractions successives.

Vous pouvez optimiser ce programme. Il est possible, notamment de n'utiliser que R7(t), si vous ne lui demandez pas de fonctionner dans le cas a=b. Il n'occupe que 10 de la mémoire programme malgré les deux tests. *Saurez-vous l'écrire ?*

III. Voici un procédé de calcul bien plus efficace. Il est connu sous le nom d'algorithme d'Euclide. Il consiste à diviser a par b puis b par le reste de la division précédente, ce reste par le reste de la dernière division, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir un quotient exact. Le PGCD est alors le dernier reste non nul. Voici, par exemple, la succession des opérations nécessaires pour calculer le PGCD de 76 et 12.

1. Le quotient de 76 par 12 est 6 ; le reste est 4.
2. Le quotient de 12 par 4 est 3 ; le reste est 0.

Le PGCD de 76 et 12 est donc 4 (dernier reste non nul).

Ex. n° 11 : écrivez un programme qui calcule le PGCD de deux entiers par l'algorithme d'Euclide.

Calculez, à l'aide de ces trois programmes, les PGCD des paires suivantes :
729, 2 ; 765, 5 ; 316, 212 ; 85, 5 ; 21, 13 ; 21, 22 ; 610, 377 ; 89, 90 ; 144, 89 ;...

Comparez les temps de calcul.

Un problème intéressant consiste à chercher combien de divisions sont nécessaires pour calculer le PGCD de deux entiers par l'algorithme d'Euclide. Sa solution fait intervenir la suite de Fibonacci.

Elle dépasse le cadre de cette série d'articles, mais les lecteurs intéressés peuvent écrire, par exemple, un programme qui compte et affiche le nombre de divisions nécessaires. Etudiez alors ce nombre pour deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci, en le comparant avec le nombre de divisions nécessaires pour deux nombres quelconques.

Rappel : la suite de Fibonacci est définie de la façon suivante :
$U_0 = 1 ; U_1 = 1$
$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$

IV. Voici enfin une méthode plutôt inhabituelle de calculer le PGCD de plusieurs entiers. Il faut disposer, pour cela, d'un calculateur permettant l'adressage indirect, et d'une « taille-mémoire » suffisante. Cette idée est exposée dans le livre de J. Kuntzmann, *Apports de l'informatique à l'enseignement mathématique,* aux éditions Cedic. L'auteur y montre que ce procédé n'est pas un algorithme bien qu'il conduise dans tous les cas à la solution du problème. En voici la description :

On dispose de n nombres dont on souhaite calculer le PGCD. On choisit au hasard deux d'entre eux. S'ils sont distincts, on substitue leur différence au plus grand. S'ils sont égaux, on en supprime un. On obtient le PGCD cherché quand on ne peut plus trouver deux nombres dans l'ensemble.

Vous remarquez que cette méthode consiste à chercher le PGCD par soustractions successives. « L'originalité » du problème réside dans le fait que les termes de la soustraction sont choisis aléatoirement. Outre l'exercice de programmation, cette méthode est intéressante par les questions qu'elle amène à se poser, notamment :

– Etant donné n nombres, combien faut-il, en moyenne, de boucles pour résoudre le problème ?
– Etant donné n nombres, quelle est la probabilité de déterminer leur PGCD en exactement k opérations, avec k fixé d'avance ? En plus de k opérations ?

Il est évident que les réponses à ces questions dépendent des nombres étudiés.

Dans ce qui suit nous vous présentons un programme écrit pour une TI.58. Il permet de calculer le PGCD de n nombres avec $2 \leqslant n \leqslant 40$. Une légère modification permet de compter le nombre de boucles de calcul et ainsi, de se faire une idée de la réponse à la première question.

PROGRAMME. PARTITION MEMOIRE : 4 OP 17

Générateur aléatoire : produit l'adresse d'un registre où on ira chercher l'un des deux nombres étudiés.

Affichage		Tou-ches	Commentaires
Pas	Codes		
000	76	Lbl	
001	12	B	
002	43	RCL	génère un entier entre 0 et 1
003	02	2	
004	85	+	
005	89	π	
006	95	=	
007	33	x^2	
008	33	x^2	
009	33	x^2	
010	22	INV	
011	59	Int	
012	42	STO	
013	02	2	
014	65	x	l'entier généré est amené entre 0 et n
015	43	RCL	
016	01	1	
017	95	=	
018	59	Int	
019	85	+	l'adresse du registre est au moins 10 (les nombres étudiés se trouvent en R10, R11, ...)
020	01	1	
021	00	0	
022	95	=	
023	92	INV SBR	

Introduction et comptage des données enregistrées en R10, R11, ...

Affichage		Tou-ches	Commentaires
Pas	Codes		
024	76	Lbl	
025	11	A	
026	72	STO Ind	
027	00	0	
028	69	Op	incrémente le pointeur de registres
029	20	20	
030	69	Op	compte les nombres introduits
031	21	21	
032	92	INV SBR	

Comparaison des deux nombres en R_i et R_j ; calcul de leur différence s'ils sont distincts

Engendre les indices i et j ; i en R03 ; j en R04

Affichage		Tou ches	Commentaires
Pas	Codes		
033	76	Lbl	
034	13	C	
035	01	1	R00 ← R00-1 ; R00 est le pointeur des registres de nombres.
036	22	INV	
037	44	SUM	
038	00	0	
039	76	Lbl	
040	18	C'	engendre i et le place en R03
041	12	B	
042	42	STO	
043	03	3	
044	32	x⇆t	
045	76	Lbl	engendre j et recommence tant que i=j
046	15	E	
047	12	B	
048	67	x=t	
049	15	E	Enregistre j en R04
050	42	STO	
051	04	4	

Affichage		Tou-ches	Commentaires
Pas	Codes		
052	73	RCL Ind	place R_j en t pour la comparaison de R_i et R_j
053	04	4	
054	32	x⇄t	
055	73	RCL Ind	
056	03	3	
057	77	x ⩾ t	$R_j > R_i$. On échange i et j pour avoir l'adresse du plus grand des deux nombres en R3
058	14	D	
059	43	RCL	
060	03	3	
061	38	Exc	
062	04	4	
063	42	STO	
064	03	3	
065	76	Lbl	

Affichage Pas	Codes	Touches	Commentaires
066	14	D	
067	73	RCL Ind	
068	04	4	place en R_i la différence R_i-R_j
069	22	INV	
070	74	SUM Ind	
071	03	3	
072	73	RCL Ind	
073	03	3	
074	32	x ⩽ t	teste la nullité de R_i
075	00	0	
076	22	INV	
077	67	x=t	R_i=0 : nouvelle boucle
078	18	C'	

$R_i = 0$. Les registres sont réorganisés en remplaçant R_i par le contenu du registre dont l'adresse est en R00.

Affichage Pas	Codes	Touches	Commentaires
079	63	Exc. Ind	échange 0 et le contenu du registre dont l'adresse est en R00
080	00	0	
081	72	STO Ind	enregistre ce nombre dans le registre dont l'adresse est en R03 (R_i)
082	03	3	
083	69	Op	décrémente R01 (nombre n d'entiers restant)
084	31	31	

Test d'arrêt. On arrête quand n=1. Le seul nombre restant est le PGCD cherché.

Affichage Pas	Codes	Touches	Commentaires
085	01	1	Test sur n.
086	32	x ⩽ t	
087	43	RCL	
088	01	1	
089	22	INV	
090	67	x=t	
091	13	C	
092	43	RCL	sauvegarde PGCD en t et du nombre-source en x
093	10	10	
094	32	x ⩽ t	
095	43	RCL	
096	02	2	

Affichage Pas	Codes	Touches	Commentaires
097	47	C.Ms	initialisation des registres à 0
098	42	STO	sauvegarde du n.s. en R02
099	02	02	
100	01	1	initialisation de R00 à 10 ; évite d'avoir à refaire le 05 du mode d'emploi à chaque calcul
101	00	0	
102	42	STO	
103	00	0	affichage du PGCD et arrêt
104	32	x ⩽ t	
105	91	R/S	

Mode d'emploi

N°	Instructions ou données	Touches	Affichage
01	Passer en mode « programme »	LRN	
02	Introduire le programme	......	......
03	Passer en mode « calcul »	LRN	
04	Introduire n.s. compris entre 0 et 1	STO 02	n.s.
05	10	STO 00	10
06	Introduire les nombres un par un	A	nb.
07	Afficher le PGCD	C	PGCD
08	Pour un autre PGCD, aller en 06		

	Registres
R00	Adresse des registres où sont enregistrés les nombres. Pointeur
R01	Nombres n d'entiers non nuls étudiés. R01=R00-10
R02	Nombre-source du générateur aléatoire. Compris entre 0 et 1
R03	Indice i, compris entre 10 et 10+n
R04	Indice j ; mêmes valeurs que i.
R10 . . . R(10+n)	Entiers dont on cherche le PGCD

Labels	A	B	C	C'	D	E
Adresses	024	000	033	039	065	045

Christophe Haro