divisez sur votre TI-57 nombres premiers : le crible d'Eratosthène

La recherche des nombres premiers a, de tout temps, suscité un intérêt très vif chez les mathématiciens, même amateurs. Une méthode utilisable a pour nom crible d'Eratosthène et cet article la présente (après avoir donné la solution des exercices du mois précédent).

L'exercice n° 12 permet de dresser une table donnant n et E(n) :

```
01 'Indicateurs d'Euler
09 '
10 LIRE N
12 B ← N ; E ← 1 ; 'E = Euler
19 '
20 B ← B-1
22 SI B=1 ALORS ALLER EN 30
   'FINI
24 SI PGCD(N,B) ≠ 1 ALORS
   ALLER EN 20
26 E ← E + 1 ; ALLER EN 20
29 '
30 AFFICHER E
32 TERMINER
```

le programme ci-contre est écrit en suivant scrupuleusement la description ci-dessus. Il peut donc sans aucun doute être amélioré, tant au point de vue rapidité d'exécution que de l'encombrement en mémoire-programme. Nous vous laissons chercher ces améliorations préférant ici rester lisible.

AFFICHAGE		
PAS	CODES	TOUCHES
00	86 1	Lbl 1
01	32 2	STO 2
02	32 3	STO 3
03	01	1
04	32 4	STO 4
05	86 2	Lbl 2
06	01	1
07	34 3	INV SUM 3
08	22	x ⇆ t
09	33 3	RCL 3
10	66	x=t
11	51 3	GTO 3
12	00	0
13	22	x ⇆ t
14	33 2	RCL 2
15	32 0	STO 0
16	33 3	RCL 3
17	32 1	STO 1
18	61 0	SBR 0
19	01	1
20	22	x ⇆ t
21	33 0	RCL 0
22	-66	INV x=t
23	51 2	GTO 2
24	01	1
25	34 4	SUM 4
26	51 2	GTO 2
27	86 3	Lbl 3
28	33 4	RCL 4
29	81	R/S
30	71	RST

MODE D'EMPLOI			
N°	INSTRUCTIONS OU DONNEES	TOUCHES	AFFICHAGE
01	Passer en mode « programme »	LRN	
01	Introduire le programme	....	....
03	Passer en mode « calcul »	LRN	
04	Initialiser le pointeur	RST	0
05	Introduire l'entier ≥ 2 Afficher E(n)	n R/S	n E(n)
06	Pour un autre calcul, aller en 05		

REGISTRES	
R0	n
R1	b
R2	n
R3	b
R4	E
R7	tests

Sous-programme de calcul du PGCD de n et b		
AFFICHAGE		TOUCHES
PAS	CODES	
31	86 0	Lbl 0
32	33 0	RCL 0
33	65	−
34	43	(
35	14	CE
36	45	÷
37	33 1	RCL 1
38	44	)
39	49	Int
40	55	x
41	33 1	RCL 1
42	32 0	STO 0
43	85	=
44	33 1	STO 1
45	-66	INV x=t
46	51 0	GTO 0
47	-61	INV SBR

Comment reconnaître un nombre premier ?

Les tables suivantes donnent quelques-uns des résultats demandés.

n	E(n)
$2^1 = 2$	1
$2^2 = 4$	2
$2^3 = 8$	4
$2^4 = 16$	8

n	E(n)
$3^1 = 3$	2
$3^2 = 9$	6
$3^3 = 27$	18
$3^4 = 81$	54

n	E(n)
$5^1 = 5$	4
$5^2 = 25$	20
$5^3 = 125$	100
$5^4 = 625$	500

Il est facile de constater que pour n premier, on a :

$E(n) = n - 1$

Il vient alors :

$E(n^k) = (n-1) \times n^{k-1}$

La solution de l'exercice n° 13 découle de celle de l'exercice précédent. Au lieu de compter les entiers premiers avec n, on doit les additionner. Il suffit donc, dans le programme précédent, de remplacer le pas *24 01 (1)* par *24 33 3 (RCL 3)*. On cumulera ainsi dans le registre R4 les entiers étrangers à n au lieu de les compter dans ce même registre.

Voici quelques-uns des résultats demandés :

n	E(n)	S(n)	S(n)/E(n)
2	1	1	1
$2^2 = 4$	2	4	2
$2^3 = 8$	4	16	4
$2^4 = 16$	8	64	8

Avec un peu de patience, et beaucoup de calculs pour votre machine, vous pourrez constater que pour tout entier n, on a :

$S(n) = \frac{1}{2} n E(n)$,

ou encore $S(n)/E(n) = \frac{n}{2}$

De même, si vous avez mené l'étude demandée à l'exercice n° 13bis, vous avez constaté que :

$S'(n) = E(d1) + E(d2) \ldots + E(dk) = n$

et ceci pour tout entier n, avec d1, d2, ..., dk les diviseurs de n.

Si ces études sur les entiers étrangers (et parfois bien étranges) vous intéressent, vous pourrez aussi étudier l'indicateur d'Euler du produit de deux étrangers. Vous n'aurez aucune peine à vérifier que :

$E(n.m) = E(n) \,.\, E(m)$ pour tout m et n tels que PGCD (n;m) = 1.

Tout ceci amène la question *comment reconnaître un nombre premier ?* Il suffit de savoir s'il a un diviseur, autre que 1 et lui-même.

EX. N° 14 : Ecrivez un programme qui affiche 1 si le naturel n introduit en entrée est premier et l'un de ses diviseurs sinon.

Les remarques de l'exercice n° 8 vous seront utiles pour écrire un programme assez rapide. Remarquez aussi qu'un nombre premier différent de 2 étant nécessairement impair, sinon 2 serait l'un de ses diviseurs et il ne serait pas premier, il suffit de rechercher ses diviseurs parmi les nombres impairs, si l'on s'abstient de faire « tourner » le programme sur les nombres pairs.

Parmi les naturels suivants, quels sont ceux qui sont premiers ? 19,23, 53, 353, 407, 509, 997, 1007, 1009, 513 581.

Pour construire une table il existe différentes méthodes. Toutes ne sont pas programmables sur de petits calculateurs de poches.

Voici tout d'abord une méthode connue sous le nom de crible d'Eratosthène.

On souhaite connaître, par exemple, tous les naturels premiers inférieurs à 400. On écrit tous les naturels de 1 à 400 dans un tableau.

Dans ce tableau, 2 est premier ; on barre tous les multiples de 2. Le premier nombre non barré est 3 qui est premier ; on barre tous les multiples de 3 qui ne le sont pas encore. Remarquez que le premier de ceux-ci est 3×3=9. Le premier nombre non barré après 2 et 3 est 5 ; il est premier et on barre tous ses multiples qui ne l'ont pas encore été. Le premier d'entre eux est 5×5=25. On recommence ainsi jusqu'à épuisement de la table. Les naturels non barrés sont premiers.

Utilisez la méthode du crible pour construire une table des entiers premiers inférieurs à 400. Les possesseurs d'un ordinateur individuel devraient se « régaler » à écrire un programme pour ce travail. *Les autres peuvent écrire un programme qui accepte en entrée un entier n et affiche la suite des multiples de n supérieurs à n^2.* Il sera très utile pour les multiples des nombres tels que 13 par exemple.

On peut aussi utiliser le programme de l'exercice n° 14 pour prolonger la table. On peut enfin, et c'est plus intéressant, résoudre l'exercice suivant :

EX. N° 15 : Ecrivez un programme qui affiche la suite des nombres premiers.

Ecrivez votre programme pour qu'il ne teste que les nombres impairs. Il les divise par tous les entiers impairs inférieurs à $\sqrt{n}$, où n désigne l'entier étudié. Il passe à l'impair suivant s'il trouve un diviseur et affiche n sinon.

Utilisez ce programme pour prolonger votre table jusqu'à 1000 par exemple.

Comment rendre maintenant ce programme plus rapide ? Pour cela, il vous faudra tenir compte des remarques suivantes.

Tout naturel premier supérieur à 3 est de la forme 6i − 1 ou 6i + 1 avec i entier supérieur ou égal à 1. Malheureusement, ces formules ne donnent pas que des entiers premiers :

i	6i − 1	6i + 1
1	5	7
2	11	13
3	17	19
4	23	25
5	29	31
•	•	•
•	•	•
•	•	•

Remarquez que 25 apparaît dans cette table, bien qu'il ne soit pas premier. Ces formules, cependant, permettent d'éliminer l'étude d'un grand nombre d'entiers impairs non premiers comme 15 ou 27 par exemple. Elles permettent donc d'engendrer une partie de la suite des entiers impairs, tout en étant assuré de ne « rater » aucun nombre premier supérieur à 3.

Vous pouvez déjà :

EX. N° 16 : Ecrire un programme qui affiche la suite des entiers premiers en ne testant que les impairs de la forme 6i ± 1.

Ce programme est plus rapide que le précédent. Une autre remarque permet de l'améliorer encore légèrement.

Les formules 6i + 1 et 6i − 1 engendre la suite 5, 7, 11, 13, 17,... Les différences entre deux nombres successifs sont alternativement 2 et 4. Si on désigne cette différence, il suffit de programmer :

D ← 4
D ← 6 − D

pour obtenir alternativement 2 et 4. La suite des impairs de la forme 6i ± 1 s'obtient alors par :

I ← O
I ← I + D

EX. N° 17 : Ecrivez un programme qui tient compte de cette dernière remarque pour engendrer la suite des entiers premiers.

Il sera un peu plus rapide, du moins on peut le penser puisque nous avons remplacé une multiplication par 6 par une soustraction. Je n'ai pas étudié le gain réalisé, et je ne suis pas certain qu'il soit bien important.

Christophe Haro