enseignement

Quand la TI 57 épluche les racines...

Les équations du second degré n'ont pas toujours de racine. Voyons comment programmer ce petit problème sur un micropoche.

```
        2E DEGRE
  AUTEUR : OLIVIER DABEE
  COPYRIGHT L'ORDINATEUR
    DE POCHE ET L'AUTEUR
**************************
 0    32  0     STO  0
 1    34  0     SUM  0
 2    81        R/S
 3    32  1     STO  1
 4    23        X AU CARRE
 5    65        -
 6    33  0     RCL  0
 7    55        MULTIPLIE PAR
 8    02        2
 9    55        MULTIPLIE PAR
 10   81        R/S
 11   85        =
 12   24        RACINE CARREE DE X
 13   32  2     STO  2
 14   84        +/-
 15   86  1     2ND LBL  1
 16   65        -
 17   33  1     RCL  1
 18   85        =
 19   45        DIVISE PAR
 20   33  0     RCL  0
 21   85        =
 22   81        R/S
 23   33  2     RCL  2
 24   51  1     GTO  1
```

■ Dès la classe de seconde, l'équation du deuxième degré fait partie du quotidien du " potache ". Le problème consiste à trouver quelle valeur il faut donner à x pour que $y=2x^2-3x+1$ (par exemple) soit égal à zéro.

Les esprits rapides ont déjà trouvé : " si $x=1$, alors ça marche ". Bravo ! Mais tout de même, cela ne suffit pas. En effet, si $x = \frac{1}{2}$, ça " marche" aussi. Car l'équation du 2e degré a la fâcheuse propriété d'admettre tantôt 2 solutions, tantôt une seule... et tantôt aucune.

Il est possible de représenter graphiquement une équation du 2e degré (comme bien d'autres, d'ailleurs). On trace un axe horizontal : l'axe des abscisses (ou axe des x), et un axe vertical : l'axe des ordonnées (ou axe des y). Pour différentes valeurs de x, on détermine grâce à l'équation les valeurs de y correspondantes. Par exemple, pour l'équation : $y=2x^2-3x+1$, si l'on donne à x la valeur 2, on obtient $y=3$; de même, pour $x=0$, on obtient $y=1$.

A chaque valeur de x (et donc de y), on associe donc un point d'abscisse x, et d'ordonnée y (fig. 1). En calculant un nombre suffisant de valeurs, on définit assez de points pour tracer une courbe.

Dans le cas présent, la courbe représentative de $y=ax^2+bx+c$ s'appelle une *parabole*. On remarque (fig. 2) que l'on a 3 possibilités pour placer la courbe par rapport à l'axe des abscisses :

- la courbe coupe l'axe des abscisses en 2 points distincts ; cela signifie qu'à ces 2 points correspondent 2 valeurs de x pour lesquelles $y=0$, c'est le cas où l'équation admet 2 solutions distinctes ;
- la courbe coupe l'axe des abscisses en 1 point (en fait, elle est tangente à cet axe) ; l'équation admet alors une seule solution (certains vous diront 2 solutions confondues, mais, de toute façon, le résultat est le même) ;
- la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses : l'équation n'a pas de solution.

On comprend alors le caractère lunatique de l'équation du 2e degré :

25 lignes pour nourrir la mémoire de votre TI 57

Voici une solution pratique qui vous évitera les calculs à la main et déterminera rapidement les racines... si elles existent.

Mode d'emploi :
- Initialisation : RST.
- Calcul : introduire a, R/S, puis b, R/S (affichage : calcul intermédiaire), puis c, R/S.
- Si l'affichage clignote, pas de racine ($\Delta<0$). Pour connaître la valeur de Δ, appuyer sur (CE ; x^2 ; + / −).
- 2 racines : après l'affichage de la 1re racine, appuyer sur R/S pour obtenir la seconde.
- 1 seule racine : celle-ci est tout simplement répétée, comme s'il s'agissait de 2 racines distinctes.

Pour un nouveau calcul, recommencer à partir de l'initialisation.

0, 1, ou 2 solutions, cela dépend de la position de la courbe par rapport à l'axe des x.

Si la construction de la courbe permet d'obtenir la représentation graphique d'une équation, elle s'avère peu précise quand on désire connaître très exactement les solutions (appelées aussi *racines*).

En revanche, la factorisation aboutit à une méthode de calcul adaptée à la résolution de toute équation du type $ax^2+bx+c=0$. On pose $ax^2+bx+c=0$ (avec $a\neq 0$).

En divisant par a :

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, d'où :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ou

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Soit : $x = \dfrac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

On pose : $\Delta = b^2-4ac$. Δ est appelé discriminant de l'équation.

- si $\Delta<0$, alors $\sqrt{\Delta}$ n'existe pas, l'équation n'a pas de racine.
- si $\Delta = 0$, alors $\sqrt{\Delta} = 0$, et donc $x = -\dfrac{b}{2a}$, racine unique (on dit aussi racine *double*)

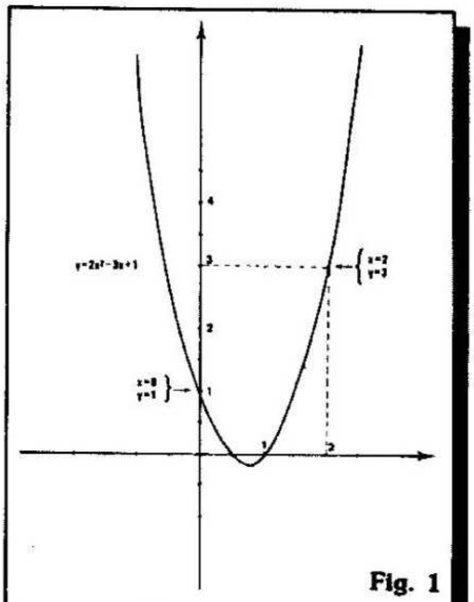


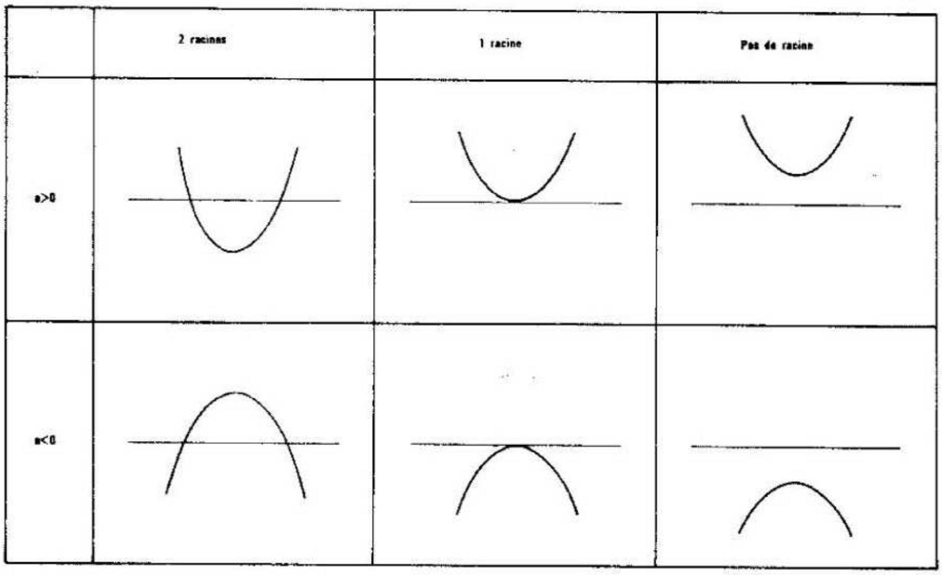
Fig. 1

- si $\Delta>0$, on a 2 racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Fig. 2 : représentation graphique des différentes hypothèses d'école



Ces 3 cas traduisent les 3 positions possibles de la courbe par rapport à l'axe des x (fig. 2).

Parmi les nombreuses applications physiques et mathématiques des équations du second degré, j'en ai retenu une qui vous permettra de poser des " colles " en déterminant facilement vous-même la solution. Nous avons vu que si $b^2 - 4ac > 0$, on a 2 racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Effectuons la somme $S = x_1 + x_2$. On obtient :

$$S = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

De même, effectuons le produit $P = x_1 \times x_2$.

On obtient :

$$P = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-b\sqrt{\Delta}+b\sqrt{\Delta}-\Delta}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

En remarquant que si $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = (x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})\,a$, d'après le calcul de S et de P, on peut remplacer $\frac{b}{a}$ par $-S$ et $\frac{c}{a}$ par P, ce qui nous donne : $x^2-Sx+P = 0$. Ainsi, connaissant la somme et le produit de 2 nombres, on peut en déduire ces 2 nombres par simple résolution d'une équation du 2e degré.

Exemple : Trouver les 2 nombres dont la somme est $\frac{3}{2}$, et le produit $\frac{1}{2}$.

On pose : $x^2-Sx+P = 0$

soit : $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} = 0$

Et l'on résoud

$$x_1 = \frac{\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{4}{2}}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{4}{2}}}{2} = 1$$

Ces 2 nombres sont $\frac{1}{2}$ et 1. Et l'on vérifie bien que $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ et que $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$. Le tour est joué.

☐ Olivier Dabée