Comment résoudre le « puzzle » de Nicomaque (TI-57)

Dans un article du précédent numéro, nous avons trouvé un programme de jeu reposant sur une propriété mathématique découverte il y a fort longtemps. Reprenons le problème à l'envers et explorons plus avant cette curiosité arithmétique.

Nicomaque II
Programme pour TI-57
Auteur Bernard Elman

00	33	1		RCL 1
01	55			X
02	07			7
03	00			0
04	75			+
05	33	2		RCL 2
06	55			X
07	02			2
08	01			1
09	75			+
10	33	3		RCL 3
11	55			X
12	01			1
13	05			5
14	85			=
15	32	7		STO 7
16	86	1	2nd	Lbl 1
17	01			1
18	00			0
19	05			5
20	-76		2nd	Inv x ⩾ t
21	51	6		GTO 6
22	33	7		RCL 7
23	81			R/S
24	71			RST
25	86	3	2nd	Lbl 3
26	32	1		STO 1
27	81			R/S
28	71			RST
29	86	5	2nd	Lbl 5
30	32	2		STO 2
31	81			R/S
32	71			RST
33	86	7	2nd	Lbl 7
34	32	3		STO 3
35	81			R/S
36	71			RST
37	86	6	2nd	Lbl 6
38	-34	7		Inv SUM 7
39	51	1		GTO 1

■ Rappelons le sujet : si l'on considère un nombre entier compris entre 1 et 100 et si l'on examine quels sont les restes que l'on obtient en le divisant par 3, par 5 et par 7, on s'aperçoit que ces restes constituent une « carte d'identité » de cet entier. Autrement dit, deux nombres différents ne peuvent pas avoir leurs trois restes identiques.

Soit a et b deux entiers ($a \neq b$). L'égalité de la division euclidienne par 3 : $a = 3 \times q_1 + r_1$ peut aussi être interprétée comme suit : $a - r_1 \in M_3$ (M_3 désignant l'ensemble des multiples de 3). De la même façon $b - r_1 \in M_3$ si b a le même reste que a.

Or, si deux nombres sont multiples d'un même troisième, leur somme ou leur différence l'est aussi. On a donc $(a - r_1) - (b - r_1) \in M_3$, et $(a - b) \in M_3$. De la même façon, si les restes de la division de a et de b par 5 et par 7 sont identiques, on a $(a - b) \in M_5$ et $(a - b) \in M_7$. La différence a - b est donc, en valeur absolue, un multiple commun de 3, de 5 et de 7. Or, le PPCM (3,5,7) est égal à 105. On aura donc ou bien $a = b$ ou bien $|a - b| \geqslant 105$. Si les entiers a et b sont inférieurs à 100, les trois restes ne seront identiques que si $a = b$.

C'est ce résultat que nous allons utiliser pour écrire un programme permettant de calculer le plus petit entier ayant r_1 comme reste dans la division par 3, r_2 dans la division par 5 et r_3 dans la division par 7.

Définissons cet entier n comme combinaison de r_1, r_2 et r_3 : $n = \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3$.

Pour que le reste dans la division par 3 soit r_1, il faut que $n = 3 \times q + r_1$, ce qui peut s'obtenir en choisissant $\beta \in M_3$, $\gamma \in M_3$ et $(\alpha - 1) \in M_3$. En effet, si $\beta = 3 \times b$, $\gamma = 3 \times c$ et $\alpha - 1 = 3 \times a$, on aura $n = (3a + 1) r_1 + 3 b r_2 + 3 c r_3 = 3 (a r_1 + b r_2 + c r_3) + r_1$.

De même, on aura : $\alpha \in M_5$, $\gamma \in M_5$ et $(\beta - 1) \in M_5$ d'une part et $\alpha \in M_7$, $\beta \in M_7$ et $(\gamma - 1) \in M_7$ d'autre part. Sachant que $\gamma \in M_3$, $\gamma \in M_5$ et $\gamma - 1 \in M_7$, on pourra choisir $\gamma = 15$ car $3 \times 5 = 15$ et $15 - 1 = 14 = 2 \times 7$. Pour β, on pourra choisir 21 car $3 \times 7 = 21$ et $21 - 1 = 20 = 4 \times 5$. Enfin 70 conviendra pour α : $70 = 2 \times 5 \times 7$ et $70 - 1 = 69 = 23 \times 3$.

Nous prendrons donc $n = 70 \times r_1 + 21 \times r_2 + 15 \times r_3$. L'entier n possède alors les mêmes restes que a, et donc $(n - a) \in M_{105}$. Il suffit dès lors de calculer n à partir des restes connus. Si n est plus petit que 105, il est égal à a. Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il est plus grand que 105, on lui enlèvera 105 autant de fois qu'il le faudra jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre n' inférieur à 105 ; on aura alors n' = a.

On trouvera ci-contre le programme de la TI-57 effectuant ces calculs. Comme il donne la solution du problème que posait le programme publié le mois dernier (1), je l'ai intitulé Nicomaque II. Le mode d'emploi en est très simple : on entre le reste dans la division par 3 en tapant r_1 SBR 3, puis le reste dans la division par 5 avec r_2 SBR 5 et le reste dans la division par 7 avec r_3 SBR 7. On presse ensuite R/S et le nombre a est affiché. Exemple : 1 SBR 3, 3 SBR 5, 6 SBR 7, R/S, et la machine affiche 13.

Pour aller plus loin

On peut étendre la propriété précédente. Ainsi, en prenant les restes dans les divisions par 3, 5, 7 et 11, on peut identifier tout entier compris entre 1 et 1000. Vous pourrez vérifier, si vous le voulez que l'on peut utiliser pour le décodage la formule : $n = 385\ r_1, + 231\ r_2 + 330\ r_3 + 210\ r_4$, et qu'éventuellement on devra enlever 1155 jusqu'à ce que n devienne inférieur à 1155.

☐ Bernard Elman

(1) Le puzzle de Nicomaque, l'Op *n° 14, pages 26 et 27.*