2 partie CALCULATRICES PROGRAMMABLES: HEWLETT OU TEXAS?

Pour ce qui est des opérations arithmétiques, les calculatrices Texas sont plus précises que les Hewlett, comme nous avons pu le vérifier le mois précédent. Cette étude avait suscité un intérêt particulièrement vif chez nos lecteurs, et nous la poursuivons aujourd'hui avec la précision obtenue sur des opérations algébriques mettant en jeu des programmes évidemment plus complexes.

L'étude que nous avons publiée le mois dernier sur les mérites comparés des calculateurs Texas et Hewlett-Packard a incité nombre de nos lecteurs à prendre la plume. Nous avions d'ailleurs prévu cet afflux de lettres, l'intérêt porté à ces machines étant évident depuis le premier article consacré aux calculs astronomiques (Science et Vie de novembre 79). Bien entendu, nous avons reçu un grand nombre de programmes menant aux mêmes résultats.

Rappelons que ces programmes n'avaient pas pour but de trouver le plus court chemin possible entre l'introduction des données et le résultat final, mais plus simplement de tester la précision des machines sur les opérations arithmétiques. Certains lecteurs se sont étonnés de cette recherche car, disent-ils, les mesures nécessaires à l'industrie ne réclament pas plus de 5 à 6 chiffres significatifs.

De fait, évaluer la longueur d'une pièce usinée au centième de millimètre quand elle fait plusieurs décimètres, relève déjà d'une haute précision. Par exemple 648,72 mm nécessite des appareils de mesure très fins. Et si la pièce atteint plusieurs mètres, une mesure au centième de mm relève du laboratoire puisqu'une simple variation de température remet tout en question — une barre d'acier de 5 m allonge de 0,6 mm en passant de 15° à 25 °C.

Or les calculateurs programmables étudiés — HP 25, 33, 67; Ti 57, 58, 59 — donnent 10 chiffres significatifs, par exemple 8 920 217,312. Supposons qu'il s'agisse de grammes : on aurait alors pesé un camion de presque 9 tonnes au milligramme près. Or le milligramme. c'est la masse du mm^3 d'eau, ou d'une pointe d'épingle. Déceler sur une balance qu'on vient de poser une pointe d'épingle sur un camion de 9 tonnes relève de l'utopie.

Rappelons toutefois que la définition légale du mètre est donnée avec 9 chiffres, et celle de la seconde avec 10 chiffres; la vitesse de la lumière, quotient d'une longueur par un temps, est connue avec 9 chiffres et en physique avancée des mesures comportant 7 ou 8 chiffres significatifs peuvent se rencontrer. En général, pourtant, on est loin de cette précision, et la plupart des constantes physiques ne sont connues qu'avec 4 chiffres — charge de l'électron, perméabilité du vide, constante de Planck, nombre d'Avogadro, etc.

La précision des calculatrices est donc largement supérieure à celle des mesures expérimentales, et un physicien se souciera peu des différences que nous avons notées. Mais il n'en va pas de même pour un mathématicien : puisqu'il y a 10 chiffres affichés, autant que ces 10 chiffres soient sûrs.
De plus il y a là une satisfaction tout à fait personnelle qui n'est pas à négliger : la plupart du temps, les calculatrices sont achetées pour le plaisir, et non pour le travail.

En ce sens, il n'est pas acceptable que la présentation des calculateurs programmables, donc les plus chers, soit si peu soignée : alors que le moindre radiocassette semble avoir été décroché du tableau de bord d'un Mirage IV, nous n'avons droit qu'au plastique le plus banal d'où se décollent souvent les feuilles de métal imprimées qui servent au repérage. Les Japonais ont mieux compris ce problème, qui offrent au moindre prix des machines dont le boîtier est en métal satiné ou en laiton chromé noir mat.

Bien sûr, le plastique n'empêche pas les calculs d'être justes, comme vous avons pu le voir le mois dernier avec les opérations arithmétiques. Nous allons maintenant passer aux opérations algébriques (racines carrées et cubiques, fonctions trigonométriques, etc.) avec la résolution de l'équation du 3e degré. Celle-ci fut considérée comme insoluble jusqu'au début du XVIe siècle; en 1537 l'Italien Jérôme Cardan publia les formules découvertes par Tartaglia, et découvrit par la même occasion les nombres imaginaires.

L'équation du 3e degré la plus générale s'écrit : $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$. En faisant $y = x - b/3a$ on la ramène à la forme réduite $x^3 + px + q$; nous ne traiterons que cette forme réduite, car de toutes façons il faut y revenir pour trouver les solutions, et partir de la forme générale alourdirait inutilement le programme avec la suite des calculs arithmétiques nécessaires pour avoir p et q en fonction de a, b, c, et d.

Les racines de l'équation $x^3 + px + q$ sont données par les deux formules générales suivantes :

$$t' = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{R}} \qquad t'' = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{R}}$$

avec $R = (q/2)^2 + (p/3)^3$

Deux cas sont à distinguer :

1) $R > 0$: l'équation possède alors une racine réelle $x' = t' + t''$ et deux racines complexes conjuguées $x'' = a + ib$ et $x''' = a - ib$ avec

$$a = -\frac{1}{2}(t' + t'') \text{ et } b = \frac{\sqrt{3}}{2}(t' - t'').$$

2) $R < 0$: l'équation possède trois racines réelles, mais obtenues à partir des six racines complexes conjuguées t' et t''. En effet, si R est négatif ou nul, on peut écrire :

$$t' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{-R}} \text{ et } t'' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{-R}}$$

Les trois racines réelles sont alors données par les trois sommes $t' + t''$. Chacune de ces sommes est de la forme $(u + iv) + (u - iv)$, et par suite égale à 2u. Il suffit donc de calculer les trois racines cubiques t' ou t'', et, négligeant la partie imaginaire de prendre à chaque fois le double de la partie réelle. Le programme suivra cette voie.

En principe, il n'existe pas de méthode algébrique pour extraire la racine cubique d'un nombre complexe, ou plus exactement celle-ci ramène à la résolution d'une équation du 3e degré, donc à notre point de départ.

Mais on sait que tout nombre de la forme $a + ib$ peut s'écrire sous la forme $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Les trois racines cubiques sont alors :

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 2\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 4\pi}{3}\right)$$

Toutes les machines essayées possédant une touche de conversion de coordonnées rectangulaires en polaires, nous transformerons $\sqrt[3]{-q/2 + i\sqrt{-R}}$ sous la forme (r, θ) et nous ferons $\sqrt{r}, \frac{\theta}{3}, \frac{\theta}{3} + 120, \frac{\theta}{3} + 240$.

Le retour aux coordonnées rectangulaires nous fournira la partie réelle dont le double donnera la racine voulue.

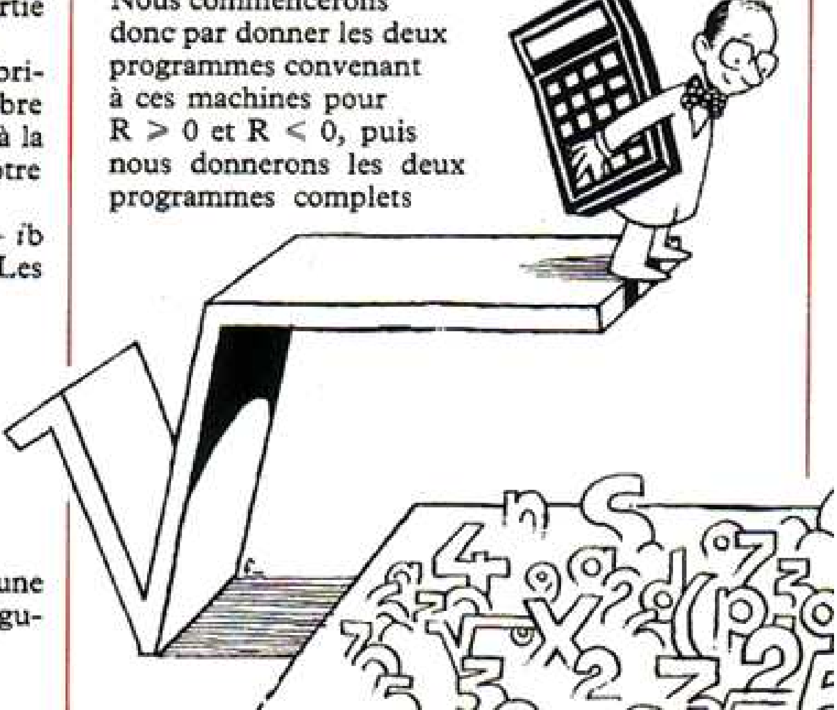
Pour les mathématiciens, nous noterons également que l'angle θ est facile à déterminer puisque partant de $a + ib$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$. Dans notre cas, ceci donne $\operatorname{tg}^2\theta = -4R/q^2$. Les formules classiques de la trigonométrie fournissent alors $\cos\theta = 3q/2p\sqrt{-\frac{p}{3}}$

De même $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{q^2/4 - R} = \sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}$

Les racines sont alors $2\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{3}, \frac{\theta}{3} + 120, \frac{\theta}{3} + 240$, donc $2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta}{3}, \ldots$

Notons qu'un mathématicien ignorant tout des nombres complexes, mais connaissant bien la trigonométrie, pourrait quand même trouver les 3 racines réelles de l'équation du 3e degré en identifiant $x^3 + px + q = 0$ avec $4\cos^3 a - 3\cos a - \cos 3a = 0$. A condition que $R = q^2/4 + p^3/27$ soit négatif ou nul, la chose est possible, et on retombe sur les mêmes formules que précédemment ($x' = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta}{3}$, etc.). L'angle θ est le même, ce qui n'était pas évident à priori. Cette méthode de résolution, dite trigonométrique, conduit à un programme particulièrement court à condition que l'équation ait bien trois racines réelles. Mais pour que le programme puisse éliminer sans anicroche le cas où les racines sont complexes, tout en restant valable pour $p = q = 0$, il faut rajouter 3 tests. La résolution complète de l'équation du 3e degré ne tient pas dans les machines ayant 49 pas de programme (HP 25 et 33, Ti 57).

Nous commencerons donc par donner les deux programmes convenant à ces machines pour $R > 0$ et $R < 0$, puis nous donnerons les deux programmes complets



HEWLETT-TEXAS

(suite de la page 59)

lieu de 1,322...532 : erreur 5.10^{-12}. Pour (0/ — 64) on obtient 4, — 2, qui sont justes et 3,464 101 615 136 pour la partie imaginaire, au lieu de 3,464 101 615 138. En général, pour p et q inférieurs à 100, l'erreur va de 0 à $\pm 5.10^{-12}$.

Si comme précédemment on multiplie p et q respectivement par 10^{2x} et 10^{3x}, les racines sont multipliées par 10^x mais l'erreur augmente, atteignant par exemple 8.10^{-11} pour (— 600/ + 9 000), ou 9.10^{-11} pour (— 500/ + 2 000).

Les résultats peuvent être résumés ainsi pour le programme testé et pour les équations choisies :

1° Les 10 chiffres affichés sont toujours justes, sauf le cas où ils sont affectés d'un 10^{-11} ou 10^{-12}.

2° Ce dernier cas doit être considéré comme égal à 0. Il est dû à la précision même de la machine qui garde le millième de milliardième sans le considérer comme nul.

3° Si on fait apparaître les 13 chiffres sur lesquels travaille en réalité la calculatrice, on peut considérer que les 11 premiers chiffres sont souvent exacts. Le douzième est rarement juste, et le treizième ne l'est presque jamais. D'une manière générale, si on arrondit le résultat global aux onze premiers chiffres, on fait parfois une erreur de ± 1 sur le onzième chiffre; le plus souvent le résultat est juste.

En pratique, et pour les programmes indiqués, les résultats donnés par les Ti 58 et 59 sont, en précision, supérieurs de 2 ordres de grandeur aux résultats donnés par les HP 33 et 67 : les HP fournissent 9 chiffres justes, les Ti en fournissent 11. Mais les Texas offrent de plus le gros avantage que, l'affichage étant limité à 10 chiffres, la valeur lue est toujours juste.

A signaler qu'aucune des machines essayées n'a connu de pannes trop sévères; la HP 67 a perdu sa virgule en cours de route, mais l'espace laissé entre les groupes de chiffres permettait de deviner sa présence. Avec la Ti 58, le bloc chargeur qui fonctionnait de manière intermittente s'est totalement arrêté. Le démontage, peu pratique car il s'agit d'un boitier collé, a révélé une cosse tordue n'assurant que par hasard le contact avec la fiche correspondante. Réparation facile, mais il est évident que le contrôle en fin de chaine est bien léger.

Il faut dire en effet que si la précision des calculatrices est très élevée, leur fiabilité semble par contre bien moyenne : les cas rencontrés autour de nous, les lettres de nos lecteurs ou les avis des vendeurs confirment la chose. Nous ne pouvons pour l'instant approfondir ce domaine, car il nous faudrait beaucoup plus de témoignages que nous n'en avons eus. Mais il y a là un problème sur lequel les constructeurs feraient bien de se pencher avec attention, d'autant plus que l'arrivée du matériel japonais va serrer la concurrence.

Renaud de LA TAILLE ■

convenant aux Hewlett-Packard 29, 34, 67, etc. et aux Texas 58, 59, etc. En pratique, nous avons rédigé les deux programmes courts avec une HP 33 et les deux programmes longs avec une HP 67 et une Ti 58. Il est possible qu'il y ait de légères modifications de départ ou de retour avec d'autres machines, mais nous pensons que nos lecteurs feront ces adaptations sans difficultés.

Ajoutons que ces programmes ne sont pas rédigés pour être le plus court possible, mais pour tester la précision des machines sur une suite d'opérations algébriques. Ils ont été faits pour être faciles à utiliser, éviter toute erreur ou ambiguité et convenir à tous les cas possibles. Ceci explique la présence de nombreux tests de comparaison; ainsi, quant $p = 0$ et $q \neq 0$, l'équation $x^3 + px + q$ n'a qu'une racine réelle. Toutefois, si $p = q = 0$, il y a trois racines réelles (0, 0 et 0). Pour être cohérent, le programme doit en tenir compte.

Ajoutons enfin que le cas $R = 0$ est ambigu. On peut considérer que l'équation a trois racines réelles, une simple x' et une double $x'' = x'''$; mais on peut aussi considérer qu'elle a une racine réelle x' et deux racines complexes conjuguées dont la partie imaginaire est nulle. A ce moment x'' et x''' se réduisent à leur partie réelle et sont donc égales. Les programmes courts doivent donc tous deux résoudre le cas où $R = 0$. Dans le programme long, nous avons séparé $R > 0$ et $R < 0$; le résultat est évidemment le même.

Pour commencer voici les deux programmes courts qui conviennent à toutes les HP; il ne sera pas difficile de les adapter pour les Ti.

R ⩽ O

```
00
        2
        ÷
        CHS
        STO 7
05      ↑
        ×
        x ≶ y
        3
        ÷
10      ↑
        ↑
        ×
        ×
        +
15      CHS
        x < 0
        GTO 00
        √x
        RCL 7
20      R → P
        3
        1/x
        yˣ
24      STO 3
25      x ≶ y
        3
        ÷
        STO 7
        x ≶ y
30      P → R
        STO 1
        STO + 1
        RCL 7
        1
35      2
        0
        STO 0
        +
        STO + 0
40      RCL 3
        P → R
        STO 2
        STO + 2
        RCL 0
45      RCL 3
        P → R
        STO 3
        STO + 3
49      3
```

Introduire p, faire ENTER, introduire q, faire R/S. Si la machine s'arrête avec 3 à l'affichage, l'équation a trois racines réelles qui sont en mémoires 1, 2 et 3. Si la machine s'arrête avec un nombre quelconque négatif à l'affichage, l'équation possède des racines complexes et ce programme ne convient pas. Il faut utiliser le programme B.

R ⩾ O

```
00
        2
        ÷
        CHS
        STO 4
05      STO 6
        x²
        x ≶ y
        3
        ÷
10      ↑
        ↑
        ×
        ×
        +
15      x < 0
        GTO 00
        √x
        STO − 4
        STO + 6
20      RCL 6
        x = 0
        GTO 29
        ABS
24      STO ÷ 6
25      3
        1/x
        yˣ
        STO × 6
        RCL 4
30      x = 0
        GTO 38
        ABS
        STO ÷ 4
        3
35      1/x
        yˣ
        STO × 4
        RCL 6
        STO + 4
40      RCL 4
        2
        ÷
        CHS
        STO 5
45      STO + 6
        3
        √x
        STO × 6
49      1
```

Introduire p, faire ENTER, introduire q, faire R/S. Si la machine s'arrête avec 1 à l'affichage, l'équation possède une racine réelle et deux racines complexes conjuguées de la forme $a \pm i\,b$. La racine réelle est en mémoire 4, a en 5 et b en 6. Si la machine s'arrête avec un nombre négatif quelconque à l'affichage, l'équation a 3 racines réelles et ce programme ne convient pas.

Dans les deux cas, le programme prend exactement 49 pas. Le premier convient pour $R < 0$ (3 racines réelles). On commence par calculer $-q/2$ qui sera mis en mémoire. On en fait ensuite le carré, puis on calcule $p^3/27$; pour cela on peut utiliser la touche y^x ou faire une double multiplication. Nous avons retenu cette dernière voie, certaines machines donnant un résultat juste si on fait $a \times a \times a$, mais non si on fait a^3.

On additionne les deux quantités pour avoir R, et on change de signe puisqu'il est en principe négatif. Le test $x < 0$ élimine le cas $R > 0$ (racines imaginaires) et la machine s'arrête en affichant un nombre négatif. On est ainsi averti que le programme ne convient pas à l'équation donnée.

On calcule ensuite la racine de $-R$, puis rappelant la mémoire on met dans les registres x et y le

nombre complexe ($-q/2$, $\sqrt{-R}$). La touche R → P le met en coordonnées polaires (r, θ); on calcule $\sqrt[3]{r}$, qui sera mis en mémoire, puis θ/3, également mis en mémoire. Revenant en coordonnées rectangulaires avec la touche P → R, on a directement la moitié de la première racine qu'on met deux fois en mémoire 1, ce qui donne x'.

On rappelle ensuite l'angle auquel on ajoute 120° et une double mise en mémoire 0 prépare θ + 240° pour la dernière racine. On ramène ensuite $\sqrt{r}$, et P → R donnera encore la demi-racine; double stockage en mémoire 2, puis rappel de l'angle, de $\sqrt{r}$, et la dernière racine est mise en mémoire 3. Enfin, on arrête la machine avec 3 à l'affichage pour marquer la présence des 3 racines réelles, par opposition au cas où la calculatrice s'arrête sur un nombre négatif quelconque, indiquant que le programme ne convient pas.

Il faut, pour les cas où R > 0, prendre le programme B que nous allons voir rapidement. Comme précédemment, calcul de $-q/2$ et mise en mémoires 4 et 6. Puis calcul de R, et élimination par le test x < 0 des cas où R < 0. On fait ensuite $\sqrt{R}$, puis addition et soustraction en mémoire 4 et 6 pour avoir $-q/2 + \sqrt{R}$ et $-q/2 - \sqrt{R}$; il reste ensuite à en extraire la racine cubique, ce qui pose un cas de conscience aux machines qui refusent de faire cette opération sur un nombre négatif.

On va alors en prendre la valeur absolue, et la diviser en mémoire par la valeur réelle, ce qui donnera ± 1 selon que la quantité est positive ou négative. Un deuxième test aura éliminé cette opération dans le cas où $-q/2 \pm \sqrt{R}$ est nul, la calculatrice refusant à juste titre de diviser par zéro. On prend alors la racine cubique et on la multiplie en mémoire par le ± 1 qui y est resté, lui restituant ainsi son signe vrai.

Avec la HP 67 qui dispose d'un flag (drapeau, ou mieux test binaire) on se contente de lever le drapeau si x < 0, on prend la racine cubique de la valeur absolue, on teste le drapeau et on remet négatif s'il est levé. Notons que l'opérateur flag revient à mettre 0 ou 1 dans une mémoire, puis à rappeler cette mémoire et à tester si elle est égale ou différente de zéro. Avec la Ti 58, qui possède un indicateur de signe — touche Op 10 — on garde cet indicateur en mémoire, on multiplie $-q/2 + \sqrt{R}$ par son signe, ce qui le met fatalement positif, on fait la racine cubique, et on multiplie en mémoire par le signe.

Nous avons donc ainsi calculé

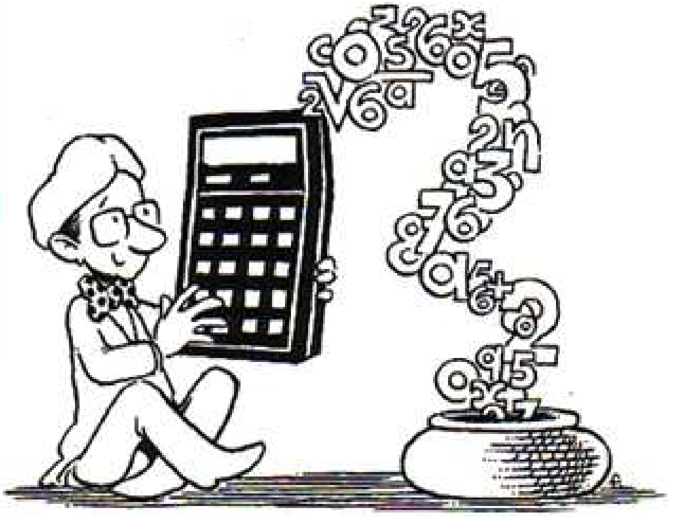
$$t' = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{R}}$$

qui est en mémoire 6; on calcule de même $t'' = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{R}}$; un rappel et une sommation en mémoire 4 donnent la racine réelle. Changée de signe et divisée par 2 elle fournit la partie réelle des 2 racines complexes et sera stockée en 5. En mémoire 6 on met la partie imaginaire $\sqrt{3}/2$ (t' — t''); enfin on met 1 pour que la calculatrice à l'arrêt marque par là qu'il y a une seule racine réelle.

Avant de donner les programmes généraux convenant à tous les cas pour les HP 34, 67, 97, etc. et pour les Ti 58, 59 et autres, nous donnerons brièvement le programme assurant la résolution trigonométrique: (CL REG, x ≶ y, 3, ÷, x = 0, GTO 45, ÷, last x, CHS, x < 0, GTO 00, √x, ↑, +, STO 1, STO 2, STO 3, ÷, ↑, ABS, 1, —, x > 0, GTO 49, x ≶ y, cos⁻¹, 3, ÷, cos, STO × 1, last x, 1, 2, 0, STO 0, +, STO + 0, cos, STO × 2, RCL 0, cos, STO × 3, 3, GTO 00, x ≶ y, x = 0, GTO 43, 1, CHS).

Introduire p, faire ENTER, introduire q, faire R/S. Deux cas se présentent : la machine s'arrête avec le chiffre 3 à l'affichage, l'équation a 3 racines réelles qui sont en mémoires 1, 2 et 3; la machine s'arrête avec un nombre négatif quelconque à l'affichage : l'équation a des racines complexes et ce programme ne convient pas. Pour une nouvelle équation, on recommence, p, ↑, q, R/S. Sans les tests ce programme est très court (31 pas). Mais il faut accepter le cas p = q = 0, rejeter p > 0 et rejeter le cas où la valeur atteinte au pas 18 sort de l'intervalle (— 1, + 1).

Les deux programmes suivants, pour les Texas et pour les Hewlett-Packard, sont ceux qui ont servi à nos essais de précision. Malgré leur apparente longueur, ils sont forts simples à suivre. On pourrait d'ailleurs les réduire en utilisant les sous-programmes, mais le cheminement logique devient alors moins facile à comprendre. Notons qu'au départ, les programmes ont été conçus pour la HP 33, puis réunis en un seul pour la HP 67, et celui-ci a enfin été adapté pour la Ti 58. Chose importante pour un test comparatif, ils suivent le même processus opératoire et ont donc à résoudre les mêmes calculs.



Texas Instruments

```
000  LBL A          067  =
     CMS                 +/—
     ÷                   STO 05
     2                   SUM 06
     =                   3
     +/—                 √x
     STO 07              Prd 06
     x²                  1
010  x≶t            078  R/S
     ÷                   LBL B
     3                   RCL 07
     ×                   x≶t
     x²                  +/—
     =                   √x
     x≶t                 INV P→R
     =                   ÷
     x≶t                 3
020  CLR            090  =
     x>t                 STO 07
     B                   x≶t
     RCL 07              INV yˣ
     x≶t                 3
     √x                  =
     +                   STO 03
     x≶t            100  x≶t
     =                   P→R
030  ×                   x≶t
     Op 10               STO 01
     STO 06              SUM 01
     =                   RCL 03
     INV yˣ              x≶t
     3                   RCL 07
     =              112  +
     Prd 06              1
     RCL 07              2
044  —                   0
     x≶t                 STO 00
     =                   =
     ×                   SUM 00
     Op 10               P→R
     STO 04         122  x≶t
052  =                   STO 02
     INV yˣ              SUM 02
     3                   RCL 03
     =                   x≶t
     Prd 04              RCL 00
     RCL 06              P→R
     SUM 04              x≶t
     RCL 04              STO 03
     ÷                   SUM 03
                         3
066  2              139  R/S
```

Introduire p, faire x ≶ t, introduire q, faire A. Si la machine s'arrête avec 3 à l'affichage, l'équation possède 3 racines réelles qui sont en mémoires 01, 02 et 03. Si la machine s'arrête avec 1 à l'affichage, il y a une seule racine réelle, en mémoire 04, et deux racines complexes conjuguées ; partie réelle et partie imaginaire sont en mémoires 05 et 06.

Hewlett Packard

```
000                 045  P→R
001  LBL A               STO 3
     CL REG              STO + 3
     2                   3
     ÷                   RTN
005  CHS            050  LBL B
     STO 7               √x
     x²                  STO 0
     x≶y                 RCL 7
     3                   +
010  ÷              055  x<0
     3                   SF 2
     yˣ                  ABS
     +                   3
     x>0                 1/x
015  GTO B          060  yˣ
     CHS                 F?2
     √x                  CHS
     RCL 7               STO 6
     R→P                 RCL 7
020  3              065  RCL 0
     1/x                 —
     yˣ                  x<0
     STO 3               SF 2
     x≶y                 ABS
025  3              070  3
     ÷                   1/x
     STO 7               yˣ
     x≶y                 F?2
     P→R                 CHS
030  STO 1          075  STO 4
     STO + 1             RCL 6
     RCL 7               STO + 4
     1                   RCL 4
     2                   2
035  0              080  ÷
     STO 0               CHS
     +                   STO 5
     STO + 0             STO + 6
     RCL 3               3
040  P→R            085  √x
     STO 2               STO × 6
     STO + 2             1
     RCL 0          088  RTN
044  RCL 3          089
```

Introduire p, faire ENTER, introduire q, faire A. Si la machine s'arrête avec 3 à l'affichage, l'équation possède 3 racines réelles qui sont en mémoires 1, 2 et 3. Si la machine s'arrête avec 1 à l'affichage, il y a une seule racine réelle, en mémoire 4, et deux racines complexes conjuguées ; partie réelle et partie imaginaire sont en mémoires 5 et 6.

Nous avons soumis des dizaines d'équations aux deux machines, et nous ne donnerons en exemple que 16 d'entre elles. Nos lecteurs pourront d'ailleurs reprendre l'essai avec d'autres variables le résultat sera identique. Toutes ces équations sont évidemment de la forme $x^3 + px + q = 0$, et nous indiquerons seulement la valeur du couple p/q, suivie de la valeur exacte des racines correspondantes.

1[er] *groupe :* équation à 3 racines réelles où q = 0 (0:0) racine (0; 0; 0); (— 9/0) (0; — 3; + 3) '— 60/0) (o; 7,745 966 692 414 834; — 7,745... 34) (— 256/0 (0; — 16; + 16)

2ᵉ *groupe :* 3 racines réelles, p et q = 0

(— 3/+2) (1; 1; — 2) (— 12/ + 16((2; 2; — 4) (— 13/ + 12) (1; 3; — 4) (— 15/ — 4) (4; (4; — 3,732 050 807 568 877; — 0,267 949 192 431 123)

(— 800/ + 8 000) (20; — 32, 360 679 774 997 897; 12, 360 ... 97)

(— 500/ + 2 000) (20; — 24, 142 135 623 730 950; 4, 142 ... 50)

3ᵉ *groupe :* 1 racine réelle, 2 racines complexes dont nous indiquons la partie réelle et la partie imaginaire).

(48/ — 256) (4; — 2; 7,745 966 692 414 834)
(— 5/ — 12) (3; — 1,5; 1,322 875 655 532 295)
(— 600/ + 9 000) (— 30 ; 15; 8,660 254 037 844 386)
(0/ — 64) (4; — 2; 3,464 101 615 137 755)
(0/27) (— 3; 1,5; 2,598 076 211 353 316)
(9/0) (0; 0; 3)

Commençons avec la Hewlett-Packard; pour le premier groupe, elle a donné :

(0; 0; 0) pour $x^3 = 0$; (3,00. .00; — 3,00. . .00; 0) pour $x^3 - 9x$; (16,00. . .00; — 16,00. .00; 0) pour $x^3 - 256\,x$. Dans les trois premiers cas, les résultats sont parfaitement justes. Avec $x^3 - 60\,x$, elle a donné 0 pour x' et $\pm$ 7,745 966 690 pour x'' = x'''. L'erreur est de 2.10^{-9}.

Elle s'est bien tirée des deux premières équations du deuxième groupe, donnant les résultats justes. Avec (— 13/ + 12) elle a fourni — 4,00. . .00, ce qui est bon, mais 2,99. . .98 au lieu de 3 (erreur 2.10^{-9}) et 1,00. . .03 pour 1 (erreur 3.10^{-9}). Avec (— 15/ — 4) elle a donné 4 et — 3,732 050 808, qui sont justes, puis x''' avec une erreur de 1.10^{-9}. Pour (— 800/ + 8000) l'erreur est la même sur x'' et x''' — par exemple 12,360 679 78 au lieu de 12,360 679 77 — et x' est juste. Même chose avec (— 500/ + 2 000): une racine juste, la seconde minorée de 1.10^{-8}, la troisième majorée de 4.10^{-9} — 4,142 135 628 au lieu de 4,14. . .624.

Avec le troisième groupe, comprenant les 6 équations à racines complexes, les choses restent identiques. Pour (— 5/ — 12) toutes les racines sont justes; pour (0/ — 64) c'est la partie réelle qui est juste, la partie imaginaire et la racine réelle étant minorées de 1.10^{-9}; (0,27) et (9,0) donnent chacune deux résultats justes, le troisième — partie imaginaire dans les deux cas — étant majoré de 1.10^{-9}. La précision faiblit un peu avec (48/ — 256), l'erreur sur la racine réelle atteignant 3.10^{-9}. Avec (— 600/9 000) la racine réelle est minorée de 1.10^{-9}, la partie réelle est juste, mais la partie imaginaire donne 8,660 254 043 au lieu de 8,660 254 038; l'erreur est de 5.10^{-9} en excès.

Nous ne pouvons citer tous les autres cas numériques testés, car l'énumération serait vite fastidieuse. Mais nous pouvons résumer les constatations faites sur les Hewlett-Packard 33 et 67 pour le programme indiqué.

1° La machine donne les résultats avec 10 chiffres significatifs (quand le résultat est de la forme 0,00. . .345. . on multiplie par 10, 100, 1000 etc. pour avoir tous les chiffres). Les 8 premiers chiffres sont toujours justes; le 10ᵉ est toujours incertain — tantôt juste, tantôt faux; cette incertitude va de 0 à $\pm$ 5, ce qui entraîne parfois une incertitude de $\pm$ 1 sur le 9ᵉ chiffre — par exemple 8,66. . .043 au lieu de 8,66. . .038 : erreur de + 5 sur le 10ᵉ chiffre entraînant une erreur de + 1 sur le 9ᵉ.

2° En règle générale donc, les 9 premiers chiffres sont bons; il vaut mieux toutefois garder les 10 chiffres car en arrondissant au 9ᵉ on risque de commettre une erreur plus grande : 4,142 135 628 arrondi donne 4, 142 135 63; or la valeur exacte 4,14. . .624 donne arrondie 4,14. . .62.

Comme on le vérifiera aisément, l'erreur augmente quand les paramètres (p, q) deviennent grands : il suffit, sur des cas déjà traités, de multiplier p par 100, et q par 1000, ou p par 10 000 et q par 1 000 000 pour multiplier les racines par 10 ou par 100; on découvrira que, par exemple, là où on avait 3 tout rond, on obtient 29,999. . .98.

Considérons maintenant les Texas 58 et 59. Ces machines ont, comme les HP, 10 chiffres à l'affichage mais travaillent en réalité sur 13 chiffres; par curiosité, nous avons relevé ces 13 chiffres pour voir de quel ordre était l'erreur commise par rapport aux Hewlett-Packard.

Avec les trois premières équations du premier groupe (— 3/ + 2), (— 13/ + 12) (— 12/ + 16) les résultats affichés sont justes. Toutefois, en allant chercher les 13 chiffres internes, on découvre qu'il y a le plus souvent une faible erreur allant de 4.10^{-12} à 22.10^{-12}. Avec (— 15/ — 4) l'erreur est de 10 à 20.10^{-12}.

Avec (— 500/2 000) la machine donne — 24, 142 135 623 62 au lieu de — 24, 142 135 623 731 : des 3 chiffres de garde 362, seul le premier est bon puisque la valeur juste est 373; l'erreur est du même ordre pour les 2 autres racines. Même chose pour (— 800/ + 8 000): par exemple 12,360 679 774 88 pour 12,360. . .500, donc 488 au lieu de 500.

Le deuxième groupe d'équations fournit des résultats plus curieux; pour $x^3 = 0$, elle donne bien (0, 0, 0). Pour (— 256,0), elle donne 16 et — 16 avec une erreur de 1 à 4 sur le 13ᵉ chiffre, mais pour la dernière racine qui vaut 0, elle fournit $-3{,}531\,281\,439\,806.10^{-11}$. Ce chiffre n'a aucune réalité et l'utilisateur doit considérer que $0{,}3.10^{-12}$ vaut 0. La même erreur sera faite avec (— 9,0) et (60,0). Les autres racines gardent une très bonne précision, par exemple pour (— 60,0) 7,745 966 692 414 au lieu de 7,745. . .415 mais aussi — 7,745. . .394 au lieu de — 7,745. . . 415 : les deux derniers chiffres sont là inexacts.

Pour le troisième groupe d'équations, celles qui comportent des racines complexes, les erreurs restent du même ordre. Avec (— 5/ — 12) la partie imaginaire est donnée pour 1,322 875 655 527 au

(suite du texte page 156)