

Polyèdres rotatifs à faces planes, congruentes et pentagonales

par Jean-François Rotgé

Résumé

Topologie structurale #9, 1984

Trois familles infinies de polyèdres convexes à faces pentagonales, planes, congruentes ont été mises en évidence à partir d'un même mode de génération. Un second mode de génération permet de faire correspondre à chaque élément de ces trois familles une famille infinie de nouveaux polyèdres convexes à faces pentagonales, planes, congruentes. Les deux modes opératoires précédents déterminent des polyèdres de 1^{re} ou de 2^e génération.

La possibilité d'une classification de ces polyèdres, à l'aide de caractéristiques particulières aux phénomènes de rotation intervenant dans leur génération a décidé finalement du titre de cette étude.

Abstract

Structural Topology #9, 1984

Rotating Polyhedra with Congruent Plane Pentagonal Faces

Three infinite families of convex polyhedra with congruent plane pentagonal faces have been created using a single method of generation. A second method of generation permits us to associate with each member of these three families an infinite family of new polyhedra with plane congruent pentagonal faces. These two operations determine the polyhedra of the first and second generation.

The possibility of classifying these polyhedra, using characteristics peculiar to the phenomenon of rotation occurring in their generation, is the focus of the present work.

I - Polyèdres de 1^{re} génération

a) Introduction

La section des côtés d'un triangle équilatéral dans un même rapport r (**Planche IIa**) donne naissance à un triangle semblable ayant même centre de rotation.

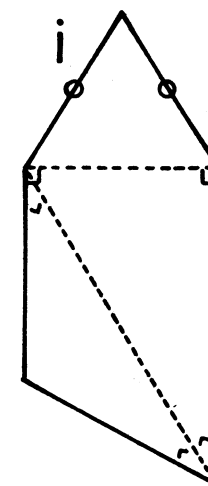
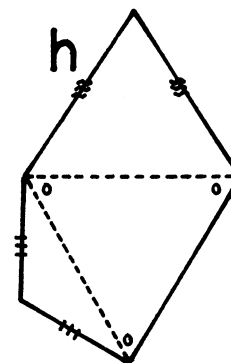
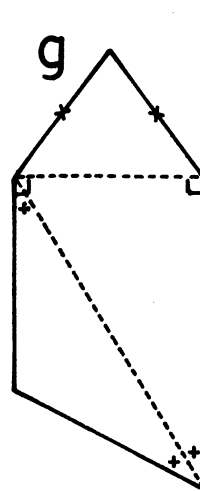
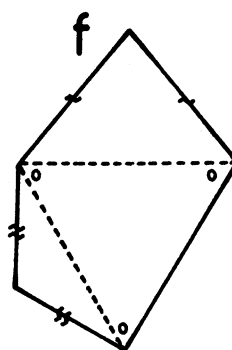
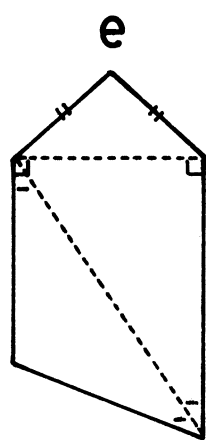
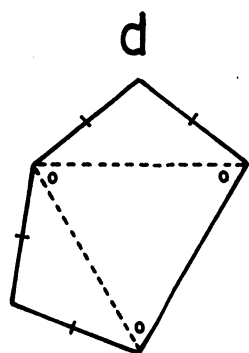
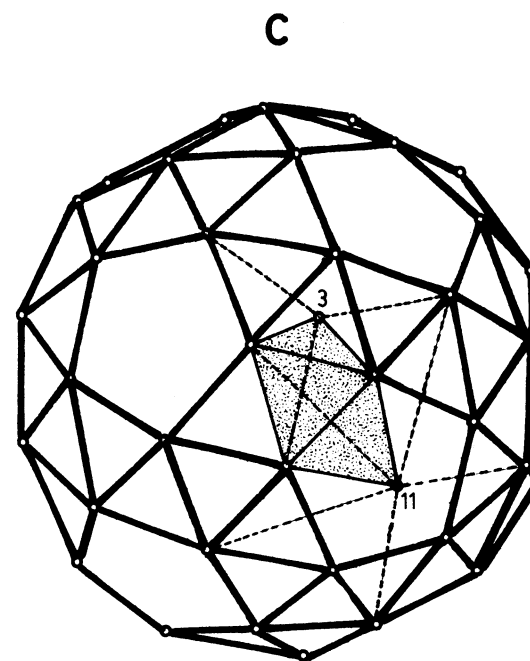
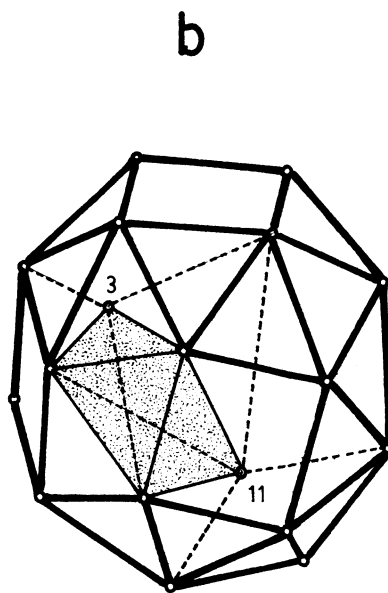
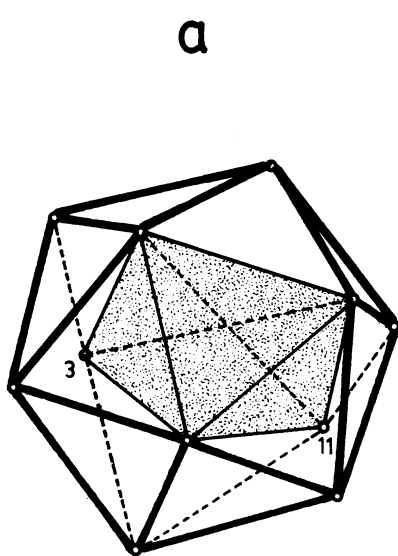
Cette opération menée avec un rapport de section adéquat sur les 4 faces d'un tétraèdre régulier définit les sommets d'un icosaèdre régulier (**Figure 1**). On peut de la même façon, en choisissant le rapport de section, définir les sommets d'un cube adouci semi-régulier à partir des 8 faces d'un octaèdre régulier (**Figure 2**), ou encore d'un dodécaèdre adouci semi-régulier à partir des 20 faces d'un icosaèdre régulier (**Figure 3**).

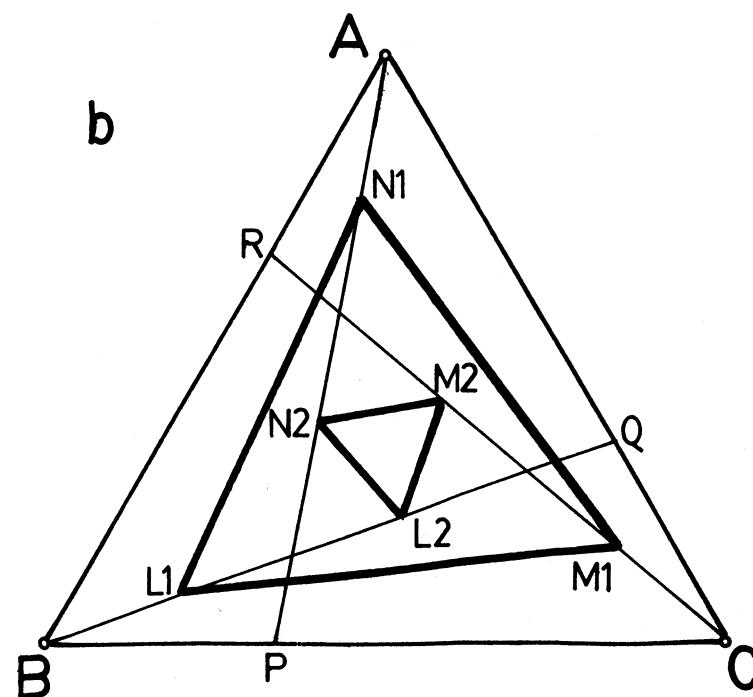
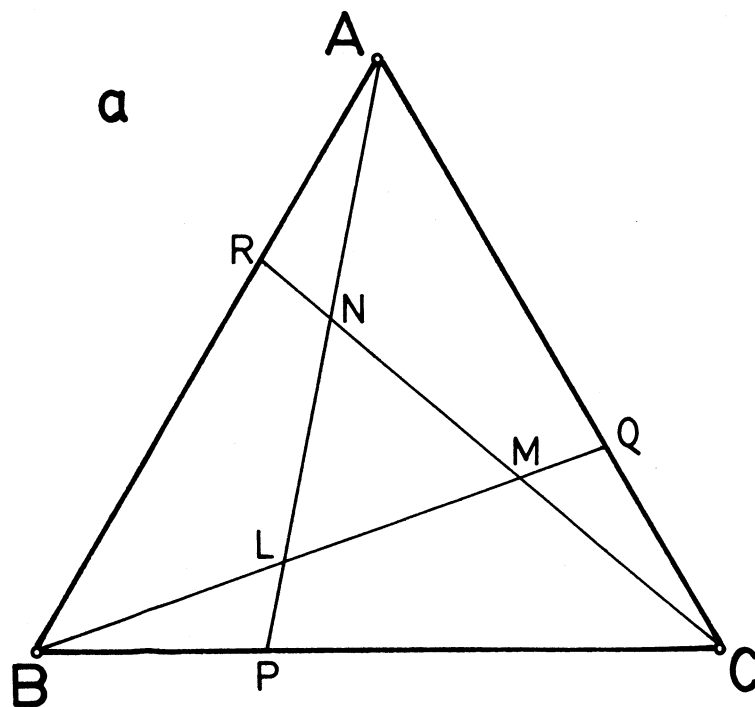
I - Polyhedra of the first generation

a) Introduction

By cutting the edges of an equilateral triangle in the same ratio r (**Plate IIa**) we create a similar triangle having a common center of rotation.

With the correct choice of ratio on the four faces of a tetrahedron, this operation leads to a definition of the vertices of a regular icosahedron (**Figure 1**). In the same way, by choosing the appropriate ratio, we can define the vertices of a semi-regular snub cube starting from the eight faces of a regular octahedron (**Figure 2**) or of a semi-regular snub dodecahedron starting from the 20 faces of a regular icosahedron (**Figure 3**).

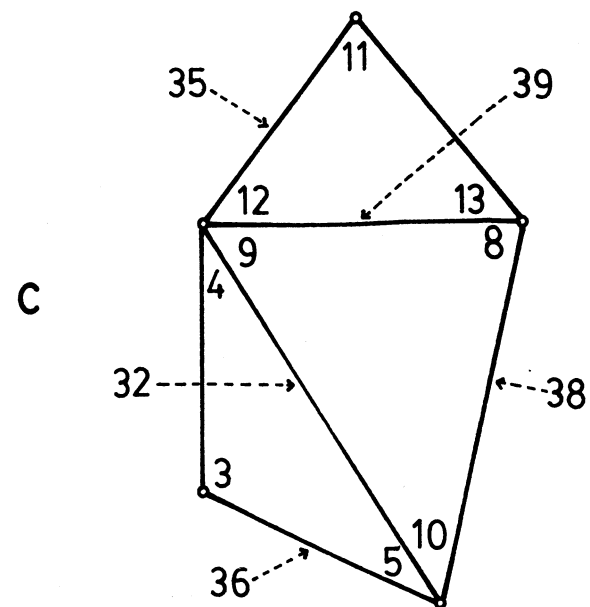




a) $r = \frac{CP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{BR}{RA} \quad k = \frac{QL}{LB} = \frac{r^2}{1+r}$

b) $k_1 = \frac{QL_1}{L_1B} \quad k_2 = \frac{QL_2}{L_2B}$

c) face quelconque : contenu des memoires



Plus généralement l'utilisation de rapports de section r , quelconques mais positifs, permet de générer par des opérations similaires les polyèdres convexes suivants:

- 1) icosaèdres irréguliers à 3 séries de faces;
- 2) cubes adoucis irréguliers à 3 séries de faces (exemple en **Figure 4**);
- 3) dodécaèdres adoucis irréguliers à 3 séries de faces.

Grâce aux phénomènes de rotation, on pourra limiter l'étude dans les 3 cas, à celle d'une calotte polyédrique pyramidale:

- 1) d'un tétraèdre régulier (le tétraèdre au complet) (**Figure 5**);
- 2) d'un octaèdre régulier (**Figure 6**);
- 3) d'un icosaèdre régulier (**Figure 7**).

En utilisant les notations des figures précédentes, le dénombrement des faces d'un icosaèdre irrégulier est le suivant:

- 4 faces triangulaires, régulières, congruentes (A1);
- 4 faces triangulaires, régulières, congruentes (A2), obtenues par construction;
- 12 faces triangulaires, irrégulières, congruentes (A3).

De même pour le dénombrement des faces d'un cube adouci irrégulier (**Figure 4**):

- 6 faces planes carrées, régulières, congruentes (B1);
- 8 faces triangulaires, régulières, congruentes (B2), obtenues par construction;
- 24 faces triangulaires, irrégulières, congruentes (B3).

Enfin pour le dénombrement des faces d'un dodécaèdre adouci irrégulier:

- 12 faces planes pentagonales, régulières, congruentes (C1);
- 20 faces triangulaires, régulières, congruentes (C2), obtenues par construction;
- 60 faces triangulaires, irrégulières, congruentes (C3).

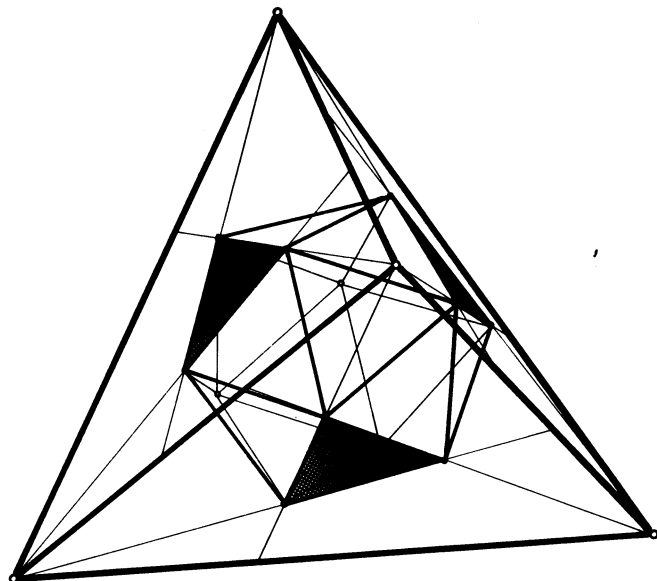


Figure 1

More generally, the use of a section ratio r , for r arbitrary but positive, leads to the generation by analogous operations of the following convex polyhedra:

- 1) irregular icosahedra with 3 types of faces;
- 2) irregular snub cubes with 3 types of faces (see **Figure 4**);
- 3) irregular snub dodecahedra with 3 types of faces.

Thanks to the phenomenon of rotation, we can restrict the study in these three cases to that of a pyramidal polyhedral calotte:

- 1) of a regular tetrahedron (the complete tetrahedron) (**Figure 5**);
- 2) of a regular octahedron (**Figure 6**);
- 3) of a regular icosahedron (**Figure 7**).

Using the notation from the preceding figures, the numbering of the faces of an irregular icosahedron is as follows:

- 4 faces being congruent regular triangles (A1);
- 4 faces being congruent regular triangles (A2), obtained from the construction;
- 12 faces being congruent irregular triangles (A3).

The numbering of the faces of an irregular snub cube is obtained in the same way (**Figure 4**):

- 6 faces being congruent regular plane squares (B1);
- 8 faces being congruent regular triangles (B2), obtained from the construction;
- 24 faces being congruent irregular triangles (B3).

And so is the numbering of the faces of an irregular snub dodecahedron:

- 12 faces being congruent regular plane pentagons (C1);
- 20 faces being congruent regular triangles (C2), obtained from the construction;
- 60 faces faces being congruent irregular triangles (C3).

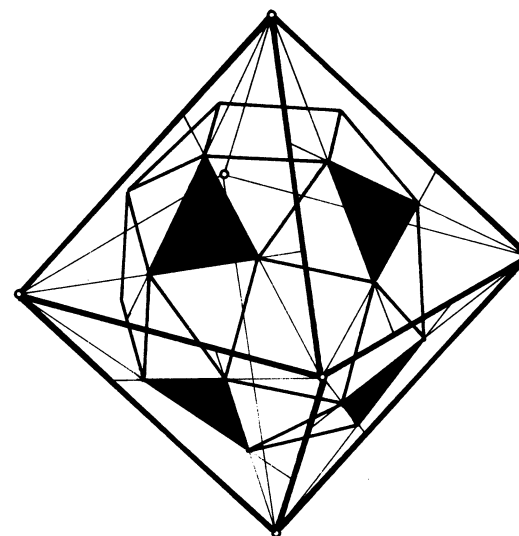


Figure 2

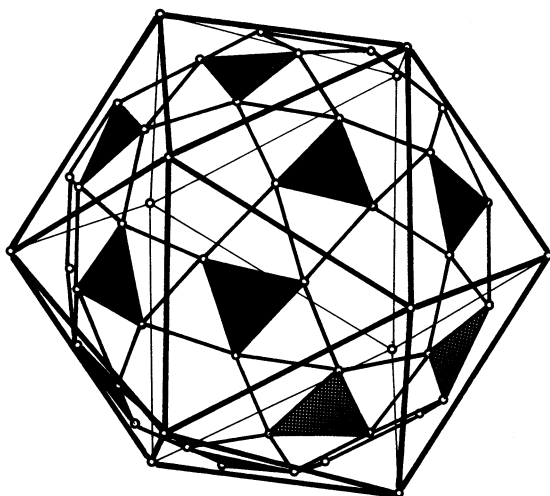


Figure 3

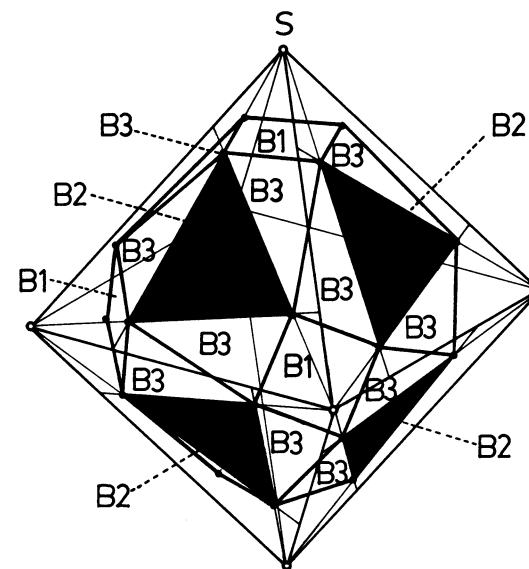


Figure 4

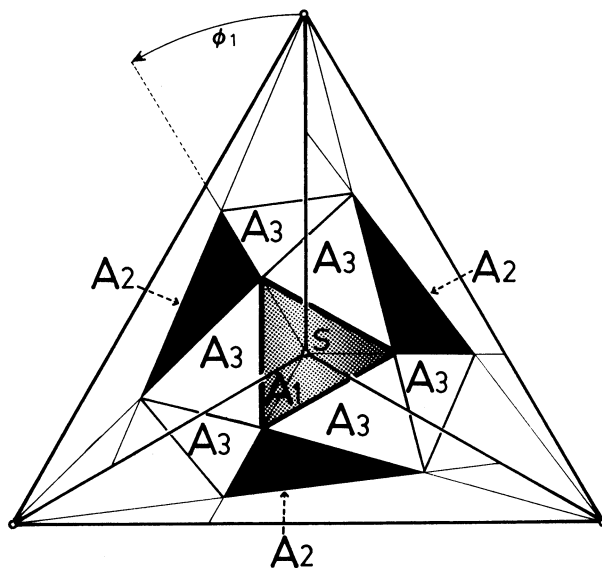


Figure 5

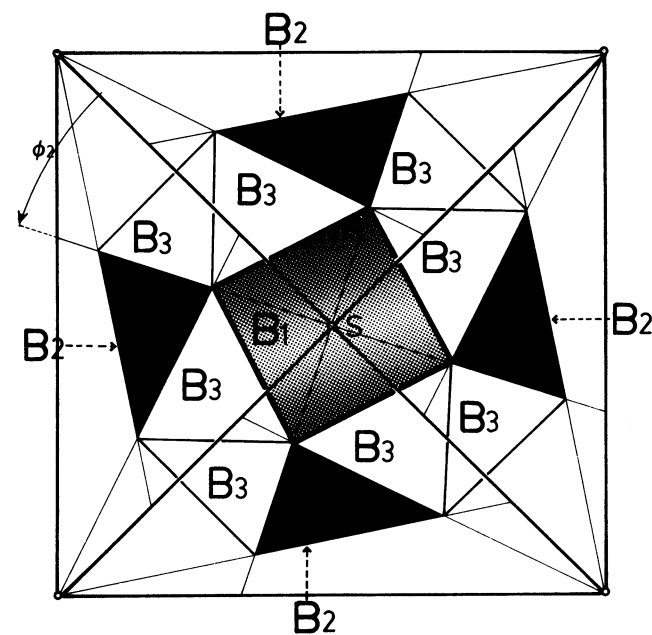


Figure 6

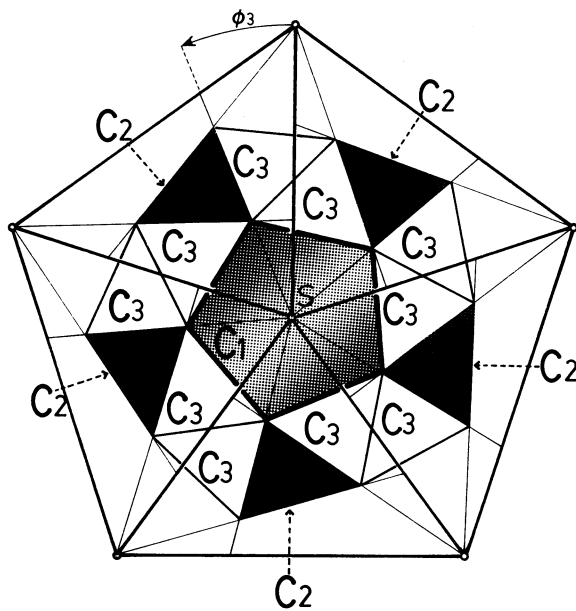


Figure 7

b) Propriétés métriques des faces des calottes pyramidales

1) calotte tétraédrique (Figure 5)

- la face A1 possède un axe de rotation passant par s et le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre;
- les faces A2 possèdent chacune un axe de rotation passant par leur orthocentre et le centre de la sphère circonscrite;
- il n'y a qu'une seule valeur d'angle dièdre entre la face A1 et ses 3 faces adjacentes A3, qui varie en fonction de r;
- il n'y a qu'une seule valeur d'angle dièdre entre une face A2 et ses 3 faces adjacentes A3, qui varie en fonction de r.

2) calotte octaédrique (Figure 6)

- la face B1 possède un axe de rotation passant par s et le centre de la sphère circonscrite à l'octaèdre;
- les faces B2 possèdent chacune un axe de rotation passant par leur orthocentre et le centre de la sphère circonscrite;
- il n'y a qu'une seule valeur d'angle dièdre entre la face B1 et ses 4 faces adjacentes B3, qui varie en fonction de r;
- il n'y a qu'une seule valeur d'angle dièdre entre une face B2 et ses 3 faces adjacentes B3, qui varie en fonction de r.

3) calotte icosaédrique (Figure 7)

- la face C1 possède un axe de rotation passant par s et le centre de la sphère circonscrite à l'icosaèdre;
- les faces C2 possèdent chacune un axe de rotation passant par leur orthocentre et le centre de la sphère circonscrite;

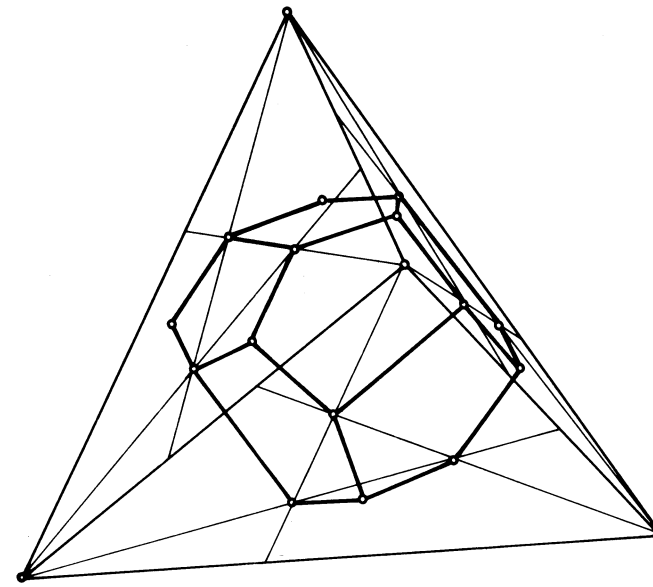


Figure 8

b) Metric properties of the faces of the pyramidal calottes

1) tetrahedral calotte (Figure 5)

- the A1 face has an axis of rotation that goes through s and the centre of the circumscribed sphere of the tetrahedron;
- each one of the A2 faces has an axis of rotation that goes through its orthocentre and the centre of the circumscribed sphere;
- the dihedral angles between the A1 face and its 3 adjacent A3 faces all have the same value, and this value varies with r;
- the dihedral angles between an A2 face and its 3 adjacent A3 faces all have the same value, and this value varies with r.

2) octahedral calotte (Figure 6)

- the B1 face has an axis of rotation that goes through s and the centre of the circumscribed sphere of the octahedron;
- each one of the B2 faces has an axis of rotation that goes through its orthocentre and the centre of the circumscribed sphere;
- the dihedral angles between the B1 face and its 4 adjacent B3 faces all have the same value, and this value varies with r;
- the dihedral angles between a B2 face and its 3 adjacent B3 faces all have the same value, and this value varies with r.

3) icosahedral calotte (Figure 7)

- the C1 face has an axis of rotation that goes through s and the centre of the circumscribed sphere of the icosahedron;
- each one of the C2 faces has an axis of rotation that goes through its orthocentre and the centre of the circumscribed sphere;

- il n'y a qu'une seule valeur d'angle dièdre entre la face C1 et ses 5 faces adjacentes C3, qui varie en fonction de r;

- il n'y a qu'une seule valeur d'angle dièdre entre une face C2 et ses 3 faces adjacentes C3, qui varie en fonction de r.

c) Génération de polyèdres à faces pentagonales congruentes irrégulières

1) En réalisant l'intersection des plans définis par les faces de type A3, nous faisons apparaître (**Planche 1a**)

- 1 sommet sur chacun des 4 axes de rotation des faces de type A1, soit 4 sommets de type 11;

- 1 sommet sur chacun des 4 axes de rotation des faces de type A2, soit 4 sommets de type 3.

Des polyèdres à 12 faces planes pentagonales congruentes irrégulières peuvent ainsi être générés pour tout rapport de section r (**Figure 8**). Leurs caractéristiques topologiques et métriques permettent de les identifier comme des dodécaèdres irréguliers à 12 faces, 20 sommets, 30 arêtes.

2) En réalisant l'intersection des plans définis par les faces de type B3, nous faisons apparaître (**Planche 1b**)

- 1 sommet sur chacun des 6 axes de rotation des faces de type B1, soit 6 sommets de type 11;

- 1 sommet sur chacun des 8 axes de rotation des faces de type B2, soit 8 sommets de type 3.

Des polyèdres à 24 faces planes pentagonales congruentes irrégulières peuvent ainsi être générés pour tout rapport de section r (**Figures 9 et 11**). Leurs caractéristiques topologiques et métriques permettent de les identifier comme des icositétraèdres pentagonaux irréguliers à 24 faces, 38 sommets, 60 arêtes.

3) En réalisant l'intersection des plans définis par les faces de type C3, nous faisons apparaître (**Planche 1c**)

- 1 sommet sur chacun des 12 axes de rotation des faces de type C1, soit 12 sommets de type 11;

- 1 sommet sur chacun des 20 axes de rotation des faces de type C2, soit 20 sommets de type 3.

Des polyèdres à 60 faces planes pentagonales congruentes irrégulières peuvent ainsi être générés pour tout rapport de section r (**Figure 10**). Leurs caractéristiques topologiques et métriques permettent de les identifier comme des hexecontaèdres pentagonaux irréguliers à 60 faces, 92 sommets, 150 arêtes.

d) Illustration de quelques cas remarquables

1) à partir du tétraèdre régulier

- $r \approx 1,618\ 033\ 989 \approx (1 + \sqrt{5})/2$ (section d'or)

polyèdre contenant l'icosaèdre régulier (**Figure 8**)

faces possédant 1 axe de symétrie et 4 arêtes égales (**Planche 1d**)

- $r \approx 2,205\ 569\ 43$

polyèdre à faces remarquables (**Planche 1e**)

2) à partir de l'octaèdre régulier

- $r \approx 1,695\ 620\ 77$ (vue no 1)

polyèdre à faces particulières: arête 35 parallèle à arête 38 (**Planche 11c**)

- the dihedral angles between the C1 face and its 5 adjacent C3 faces all have the same value, and this value varies with r;

- the dihedral angles between a C2 face and its 3 adjacent C3 faces all have the same value, and this value varies with r.

c) Generation of polyhedra with irregular congruent pentagonal faces

1) When the intersection of the planes defined by the type A3 faces is drawn, it shows (**Plate 1a**)

- 1 vertex on each of the 4 axes of rotation of the type A1 faces, i.e. 4 type 11 vertices;

- 1 vertex on each of the 4 axes of rotation of the type A2 faces, i.e. 4 type 3 vertices.

Polyhedra with 12 irregular congruent pentagonal plane faces can be generated in this way for any cutting ratio r (**Figure 8**). Their topological and metric characteristics allow their identification as irregular dodecahedra with 12 faces, 20 vertices, 30 edges.

2) When the intersection of the planes defined by the type B3 faces is drawn, it shows (**Plate 1b**)

- 1 vertex on each of the 6 axes of rotation of the type B1 faces, i.e. 6 type 11 vertices;

- 1 vertex on each of the 8 axes of rotation on the type B2 faces, i.e. 8 type 3 vertices.

Polyhedra with 24 irregular congruent pentagonal plane faces can be generated in this way for any cutting ratio r (**Figures 9 and 11**). Their topological and metric characteristics allow their identification as irregular pentagonal icositetrahedra with 24 faces, 38 vertices, 60 edges.

3) When the intersection of the planes defined by the type C3 faces is drawn, it shows (**Plate 1c**)

- 1 vertex on each of the 12 axes of rotation of the type C1 faces, i.e. 12 type 11 vertices;

- 1 vertex on each of the 20 axes of rotation of the type C2 faces, i.e. 20 type 3 vertices.

Polyhedra with 60 irregular congruent pentagonal plane faces can be generated in this way for any cutting ratio r (**Figure 10**). Their topological and metric characteristics allow their identification as irregular pentagonal hexecontahedra with 60 faces, 92 vertices, 150 edges.

d) Illustration of a few remarkable cases

1) starting from the regular tetrahedron

- $r \approx 1,618\ 033\ 989 \approx (1 + \sqrt{5})/2$ (golden ratio)

polyhedron containing the regular icosahedron (**Figure 8**)

faces having 1 axis of symmetry and 4 equal edges (**Plate 1d**)

- $r \approx 2,205\ 569\ 43$

polyhedron with remarkable faces (**Plate 1e**).

2) starting with remarkable octahedron

- $r \approx 1,695\ 620\ 77$ (view no 1)

polyhedron with peculiar faces: edge 35 parallel to edge 38 (**Plate 11c**)

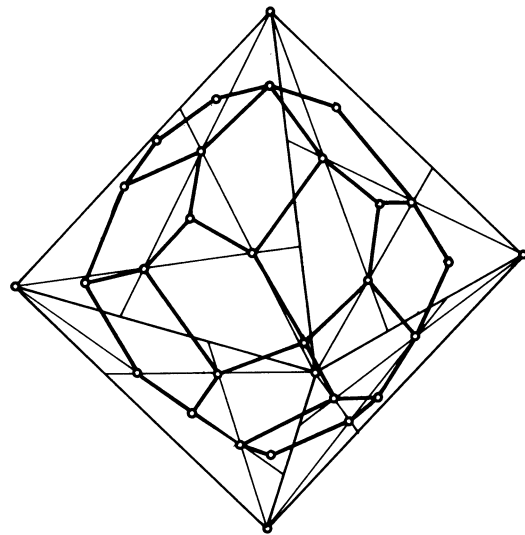


Figure 9

- $r \cong 1,839\,286\,755$ (vues no 2-3)
polyèdre contenant le cube adouci semi-régulier (**Figure 9**)
construction illustrée en **Planche Ib** et face illustrée en **Planche If**
- $r = 2$ (vues no 4-5)
polyèdre ayant 14 de ses sommets sur un rhombidodécaèdre
- $r \cong 2,658\,967\,082$ (vues no 6-7)
polyèdre à faces remarquables (**Figure 11**) (**Planche Ig**)
- $r \cong 2,658\,967\,082$ - troncation (vues no 8-9)
polyèdre aux propriétés métriques intéressantes (construction - projections orthogonales)

3) à partir de l'icosaèdre régulier

- $r \cong 1,943\,151\,259$ (vues no 10-11)
polyèdre contenant le dodécaèdre adouci semi-régulier (**Figure 10**)
face illustrée (**Planche Ic, h**)
- $r \cong 2,193\,527\,085$ (vues no 12-13)
polyèdre ayant 32 de ses sommets sur un rhombitriacontaèdre
- $r \cong 2,878\,201\,678$ (vue no 14)
polyèdre à faces remarquables (**Planche Ii**)

e) Relations analytiques

Pour générer l'icosaèdre régulier, le cube et le dodécaèdre adoucis semi-réguliers et donc par extension les polyèdres rotatifs qui les contiennent, r doit être solution réelle de l'équation:

$$r^3 - r^2 - r - 1 + 2 \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

lorsque $\alpha = 60^\circ$, $r = (1 + \sqrt{5})/2$
lorsque $\alpha = 90^\circ$, $r \cong 1,839\,286\,755$
lorsque $\alpha = 108^\circ$, $r \cong 1,943\,151\,259$.

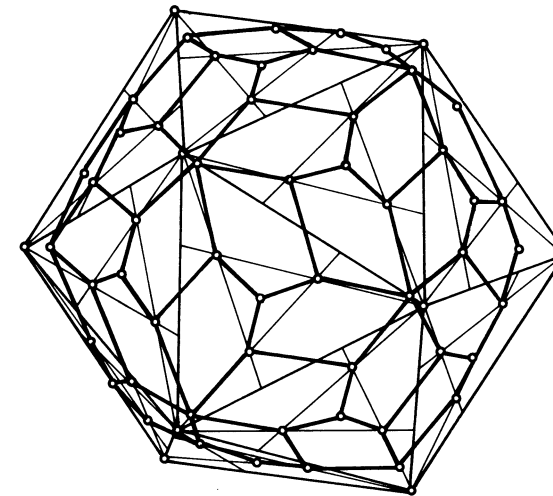


Figure 10

- $r \cong 1,839\,286\,755$ (views no 2-3)
polyhedron containing the semi-regular snub cube (**Figure 9**)
construction illustrated on **Plate Ib**, face illustrated on **Plate If**
- $r = 2$ (views no 4-5)
polyhedron with 14 of its vertices on a rhombidodecahedron
- $r \cong 2,658\,967\,082$ (views no 6-7)
polyhedron with remarkable faces (**Figure 11**) (**Plate Ig**)
- $r \cong 2,658\,967\,082$ - truncation (views no 8-9)
polyhedron with interesting metric properties (construction - orthogonal projections)

3) starting from the regular icosahedron

- $r \cong 1,943\,151\,259$ (views no 10-11)
polyhedron containing the semi-regular snub dodecahedron (**Figure 10**)
face illustrated (**Plate Ic, h**)
- $r \cong 2,193\,527\,085$ (views no 12-13)
polyhedron with 32 of its vertices on a rhombitriacontahedron
- $r \cong 2,878\,201\,678$ (view no 14)
polyhedron with remarkable faces (**Plate Ii**)

e) Analytical relations

In order to generate the regular icosahedron, the semi-regular snub cube and the semi-regular snub dodecahedron, and, by extension, the rotating polyhedra which contain them, r must be a real number which solves the following equation:

$$r^3 - r^2 - r - 1 + 2 \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

when $\alpha = 60^\circ$, $r = (1 + \sqrt{5})/2$
when $\alpha = 90^\circ$, $r \cong 1,839\,286\,755$
when $\alpha = 108^\circ$, $r \cong 1,943\,151\,259$.

Pour générer les faces particulières de la **Planche Ie, g, i**, r doit être solution réelle de l'équation:

$$-r^3 + 2r^2 + r(3 \sin^2 \theta/2 - 1) + 3 \sin^2 \theta/2 = 0 \quad (2)$$

lorsque θ est l'angle dièdre du tétraèdre

$$r \cong 2,205\,569\,43$$

lorsque θ est l'angle dièdre de l'octaèdre

$$r \cong 2,658\,967\,082$$

lorsque θ est l'angle dièdre de l'icosaèdre

$$r \cong 2,878\,201\,678$$

L'équation (2) exprime une double condition:

- l'orthogonalité dans l'un des deux cas d'orthogonalité présents sur chaque face
- et/ou le parallélisme de deux arêtes particulières.

f) Remarques sur les valeurs de r aux limites et enantiomorphisme

Lorsque r tend vers 0 ou $+\infty$

- le dodécaèdre irrégulier dégénère en tétraèdre régulier;
- l'icositétraèdre pentagonal irrégulier dégénère en octaèdre régulier;
- l'hexecontaèdre pentagonal irrégulier dégénère en icosaèdre régulier.

Lorsque r tend vers 1 (génération des duals)

- le dodécaèdre irrégulier dégénère en tétraèdre régulier;
- l'icositétraèdre pentagonal irrégulier dégénère en hexaèdre régulier;
- l'hexecontaèdre pentagonal irrégulier dégénère en dodécaèdre régulier.

À toute valeur de r comprise entre 1 et $+\infty$ correspond une valeur inverse $1/r$. Une valeur r et son inverse génèrent deux polyèdres enantiomorphes.

II - Polyèdres de 2^e génération

À un rapport de section r correspond, pour les polyèdres de 1^{re} génération, un polyèdre unique, la réciproque étant vraie.

Cette propriété peut être mise en évidence en définissant pour chaque valeur de r un angle de rotation ϕ des faces de type A1, B1, C1 par rapport au contour polygonal régulier de chaque base des calottes pyramidales régulières des tétraèdres, octaèdres et icosaèdres réguliers (Figures 5, 6, 7).

Nous aurons pour chacun des 3 cas:

$$1) 0 \leq \phi_1 \leq 360^\circ/3 \quad (\text{Figure 5})$$

$$2) 0 \leq \phi_2 \leq 360^\circ/4 \quad (\text{Figure 6})$$

$$3) 0 \leq \phi_3 \leq 360^\circ/5 \quad (\text{Figure 7})$$

Si à présent pour r constant on fait varier le rapport k initialement tenu à $k = r^2/(1+r)$, on définit alors un second mode de génération de polyèdres rotatifs (**Planche IIb**).

In order to generate the peculiar faces shown on **Plate Ie, g, i**, r must be a real number which solves the following equation:

$$-r^3 + 2r^2 + r(3 \sin^2 \theta/2 - 1) + 3 \sin^2 \theta/2 = 0 \quad (2)$$

when θ is the dihedral angle of the tetrahedron

$$r \cong 2,205\,569\,43$$

when θ is the dihedral angle of the octahedron

$$r \cong 2,658\,967\,082$$

when θ is the dihedral angle of the icosahedron

$$r \cong 2,878\,201\,678$$

The equation (2) expresses a double condition:

- the orthogonality in one of the two cases of orthogonality found on each face
- and/or the parallelism of two particular edges.

f) Remarks about the values of r at the limits and enantiomorphism

When r tends toward 0 or $+\infty$

- the irregular dodecahedron degenerates into a regular tetrahedron;
- the irregular pentagonal icositetrahedron degenerates into a regular octahedron;
- the irregular pentagonal hexecontahedron degenerates into a regular icosahedron.

When r tends toward 1 (generation of the duals)

- the irregular dodecahedron degenerates into a regular tetrahedron;
- the irregular pentagonal icositetrahedron degenerates into a regular hexahedron;
- the irregular pentagonal hexecontahedron degenerates into a regular dodecahedron.

Any value of r ranging between 1 and $+\infty$ is associated with an inverse value $1/r$. A r value and its inverse generate two enantiomorphic polyhedra.

II - Polyhedra of the second generation

With any given cutting ratio r , for the polyhedra of the first generation, is associated a single polyhedron; and the reciprocal statement is true.

This property can be highlighted by defining for each value of r an angle of rotation ϕ of the type A1, B1, C1 faces measured from the regular polygonal perimeter of each base of the regular pyramidal calottes of the regular tetrahedra, octahedra and icosahedra (Figures 5, 6, 7).

Each one of the 3 cases will yield the following results:

$$1) 0 \leq \phi_1 \leq 360^\circ/3 \quad (\text{Figure 5})$$

$$2) 0 \leq \phi_2 \leq 360^\circ/4 \quad (\text{Figure 6})$$

$$3) 0 \leq \phi_3 \leq 360^\circ/5 \quad (\text{Figure 7})$$

If now, while the r ratio is kept constant, the k ratio, initially kept at $k = r^2/(1+r)$, is allowed to vary, then a second mode of generation of the rotating polyhedra is defined (**Plate IIb**).

The rotation angles ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 remain identical to themselves and the type A1, B1, C1

B1, C1 varient de façon homothétique, le centre d'homothétie étant dans chacun des cas le sommet s des calottes pyramidales (Figures 12, 13, 14).

Les propriétés métriques énoncées au paragraphe Ib n'étant pas altérées, une nouvelle génération de polyèdres à faces planes pentagonales congruentes irrégulières s'avère possible.

- 1) *À partir du tétraèdre, à nouveau:*
des dodécaèdres irréguliers à 12 faces, 20 sommets, 30 arêtes.

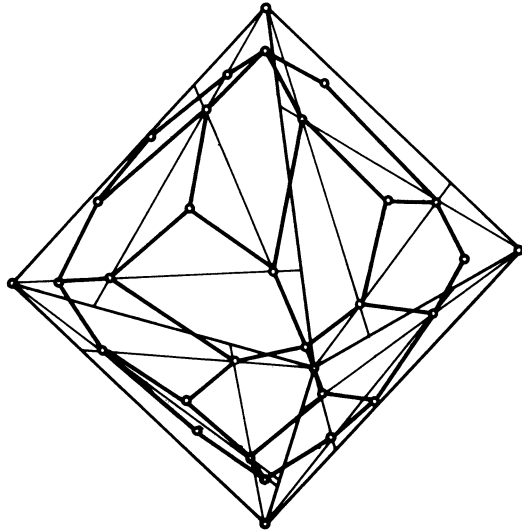


Figure 11

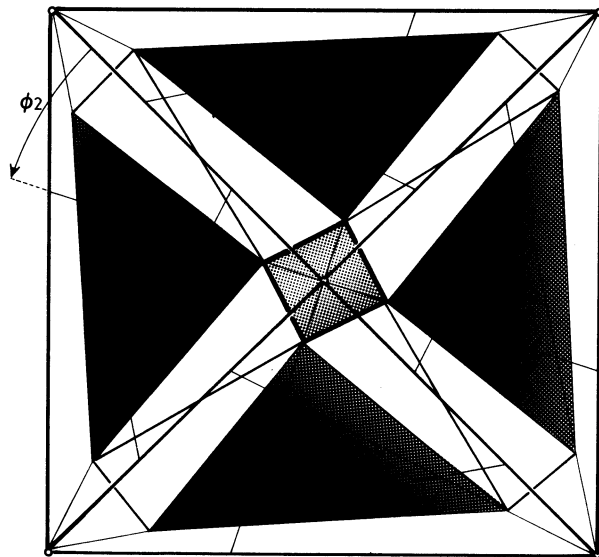


Figure 13

faces vary in an homeothetic way, the centre of homeothety being the s vertex of the pyramidal calottes in each case (Figures 12, 13, 14).

The metric properties stated in paragraph Ib being not altered, a new generation of polyhedra with irregular congruent pentagonal plane faces is disclosed.

- 1) *Starting from the tetrahedron, again:*
irregular dodecahedra with 12 faces, 20 vertices, 30 edges.

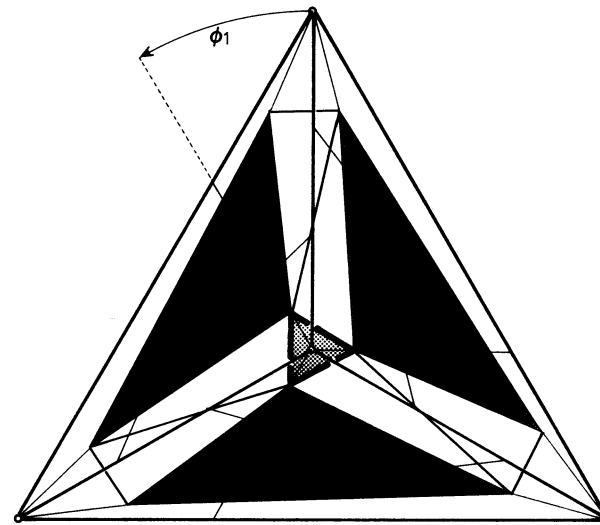


Figure 12

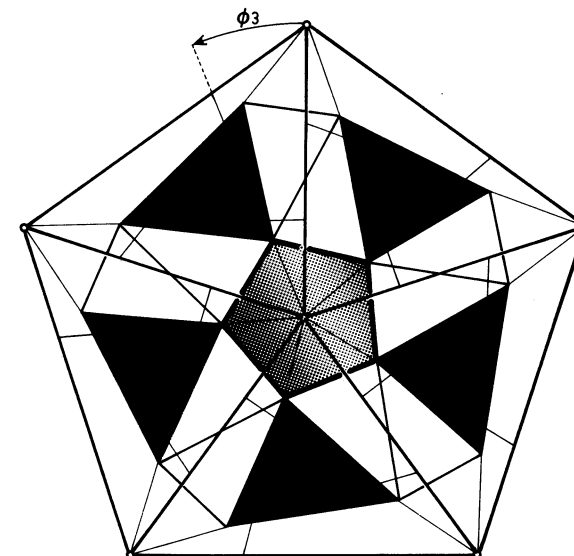


Figure 14

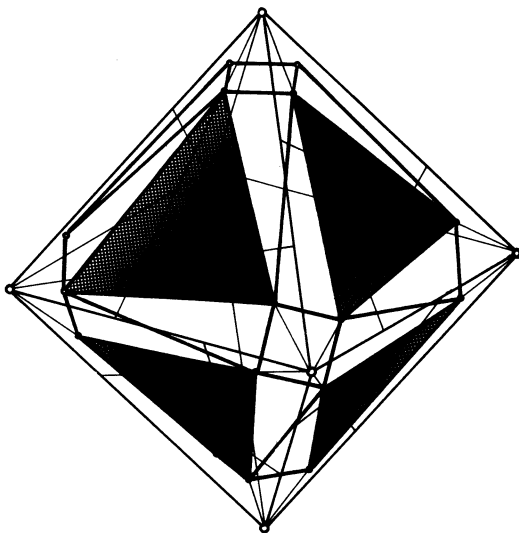


Figure 15

- 2) *À partir de l'octaèdre (Figures 15, 16), à nouveau:*
des icositétraèdres pentagonaux irréguliers à 24 faces, 38 sommets, 60 arêtes.
(Notons que les polyèdres des Figures 9 et 16 ont même angle de rotation ϕ).

- 3) *À partir de l'icosaèdre, à nouveau:*
des hexecontaèdres pentagonaux irréguliers à 60 faces, 92 sommets, 150 arêtes.

Tout angle de rotation ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 auquel correspond un seul polyèdre de 1^{re} génération permet donc de générer une infinité de polyèdres de 2^e génération.

Conclusion

La richesse des familles présentées dans cette étude est avant tout liée à l'infinité des créations possibles des polyèdres convexes mentionnés tout au long de cet article. Des recherches orientées sur des problèmes précis comme la métrique des faces (exemple: éventuels axes de symétrie pour les faces, égalité des côtés, etc.), ou encore la convexité des polyèdres de 2^e génération qui n'a pas été abordée ici, ou bien les analogies topologiques existant avec les duals des octaèdres, cubes adoucis et dodécaèdres adoucis, etc. devraient être entreprises, permettant une meilleure connaissance de ces familles et je l'espère la «mise à jour» de polyèdres remarquables.

Notes sur le programme pour TI 59

Afin de permettre la construction de maquettes ou la vérification de relations analytiques concernant la métrique des faces, un programme pour calculatrice programmable est joint à l'étude. L'emploi des fonctions circulaires qui en réduisait la longueur a été abandonné de façon à accroître la précision des résultats.

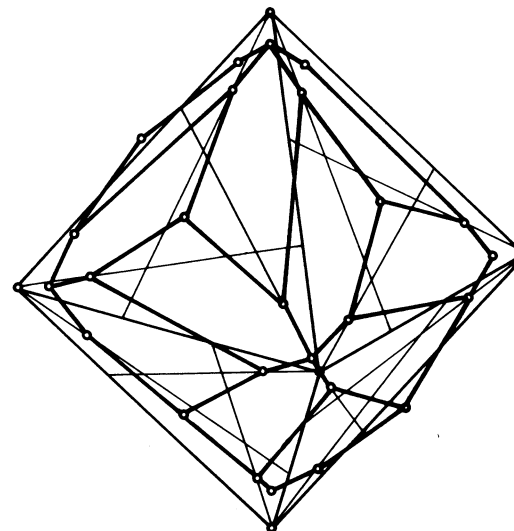


Figure 16

- 2) *Starting from the octahedron (Figures 15, 16), again:*
irregular pentagonal icositetrahedra with 24 faces, 38 vertices, 60 edges.
(Let us note that the polyhedra of the Figures 9 and 16 have the same angle of rotation ϕ).

- 3) *Starting from the icosahedron, again:*
irregular pentagonal hexecontahedra with 60 faces, 92 vertices, 150 edges.

Any angle of rotation ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , which is associated with a single polyhedron of the first generation, thus allows the generation of an infinity of polyhedra of the second generation.

Conclusion

The profuseness of the families introduced through this study springs mainly from the infinity of the possible creations of the convex polyhedra mentioned throughout this article. Researches should be undertaken and should deal with precise problems like the metrics of faces (example: eventual axes of symmetry for the faces, equality of edges, etc.), or the convexity of the polyhedra of the second generation which has not been tackled here, or the topological analogies involving the duals of octahedra, snub cubes and snub dodecahedra, etc.; these researches would allow a better understanding of these families, and, let us hope so, the «unearthing» of remarkable polyhedra.

Notes about the programme for TI 59

In order to allow the building of models or the verification of the analytical relations pertaining to the metrics of faces, a programme for programmable calculators is joined to this study. The trigonometric functions that used to reduce its length have been dropped so as to increase the precision of the results.

Pour générer les faces des dodécaèdres irréguliers:

Partition: 639.39

Module: Master Library

Nombre de cartes: 2

Introduire: la valeur choisie de r en mémoire 01: r sto 01

Pour les polyèdres de 2^e génération, k en mémoire 02: k sto 02

Puis appuyer sur: RST 2nd St flg N R/S

avec N = 4 pour les dodécaèdres irréguliers

N = 5 pour les icositétraèdres irréguliers

N = 6 pour les hexecontaèdres irréguliers.

Affichage: 0, lorsque le programme est terminé.

Valeur des angles et des arêtes: contenues dans les mémoires dont les numéros figurent en **Planche IIc**.

Ex.: Rcl 11 affichera la valeur de l'angle de type 11 différenciable de celui de type 3 par la **Planche Ia, b, c**.

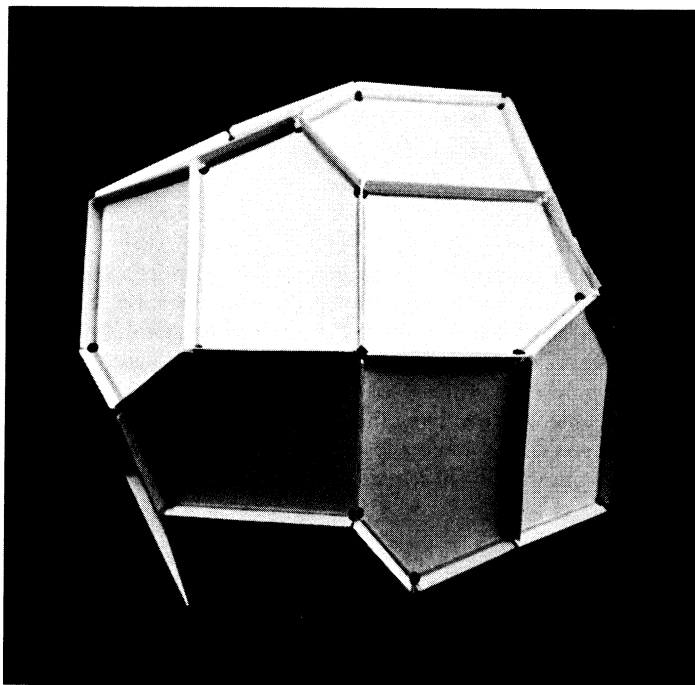
Remarque: l'introduction des valeurs limites de r et k aboutit à des résultats erronés.

Bibliographie

L. Lines, *Solid Geometry*, Dover Publications, New York, 1965.

A. Pugh, *Polyhedra: a visual approach*, University of California Press, Berkeley, California, 1976.

A. Gheorgiu & V. Dragomir, *La représentation des structures constructives*, Eyrolles, Paris.



Vue 1 — View 1

In order to generate the faces of the irregular dodecahedra:

Partition: 639.39

Module: Master Library

Number of cards: 2

Feed in: the chosen r value into memory 01: r sto 01

For the polyhedra of the second generation, the chosen k value into memory 02: k sto 02

Then press on: RST 2nd St flg N R/S

using N = 4 for the irregular dodecahedra

N = 5 for the irregular icositetrahedra

N = 6 for the irregular hexecontahedra.

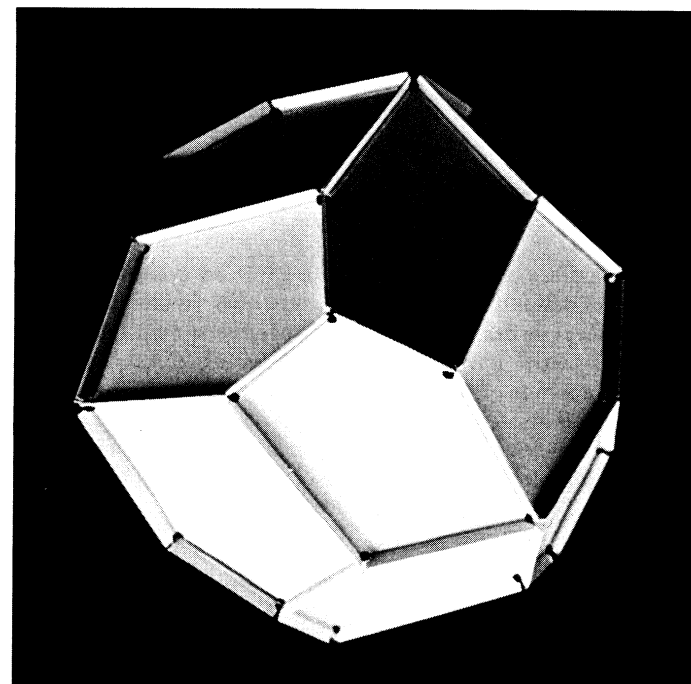
Display: 0, when the programme is over.

Values of the angles and the edges: stored in the memories whose number appear on **Plate IIc**.

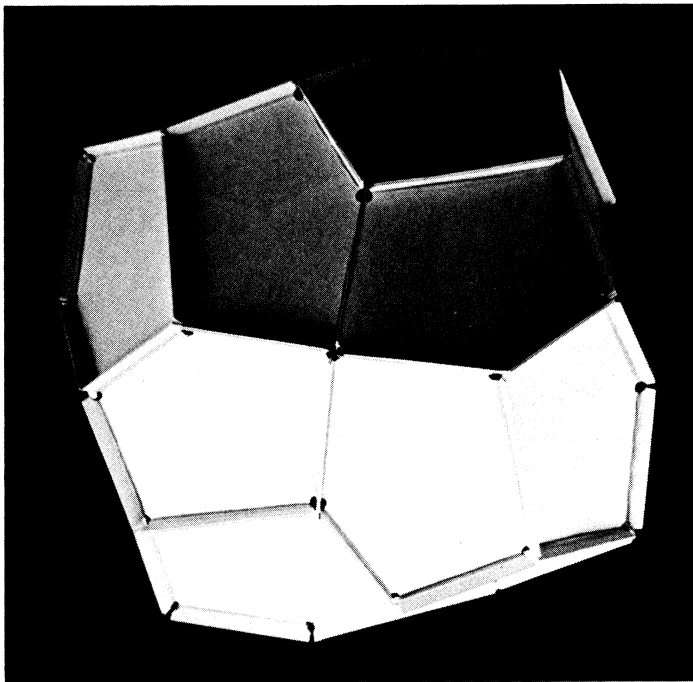
Ex.: Rcl 11 will display the value of the type 11 angle; this angle is distinguished from the type 3 one with the help of **Plate Ia, b, c**.

Remark: if the r and k values at the limits are fed in, incorrect results will be produced.

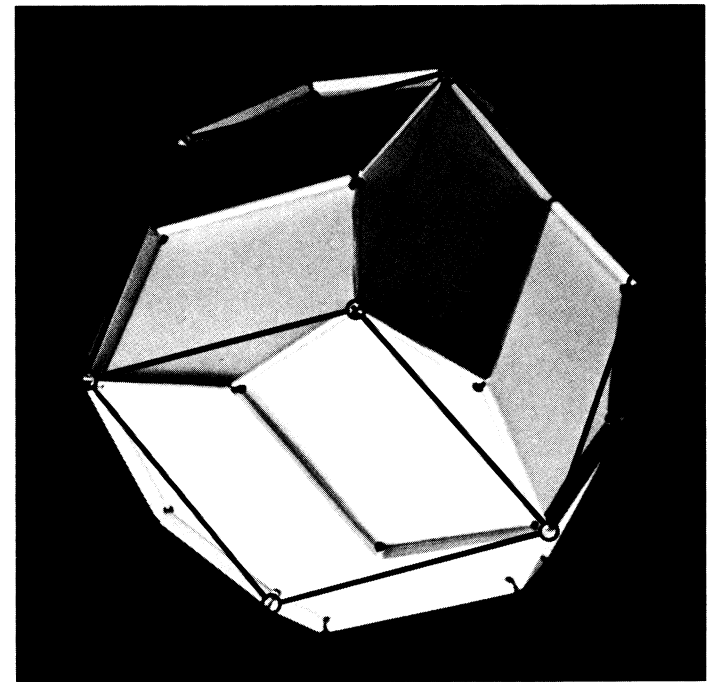
Bibliography



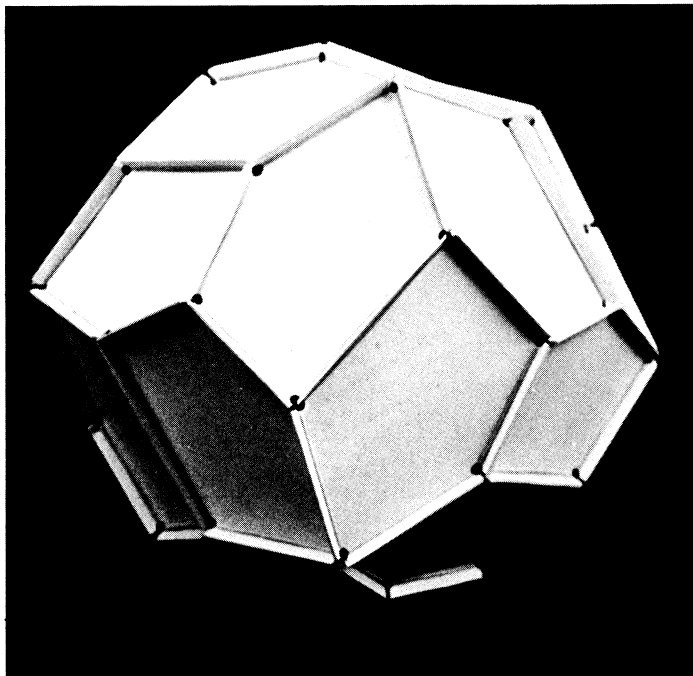
Vue 2 — View 2



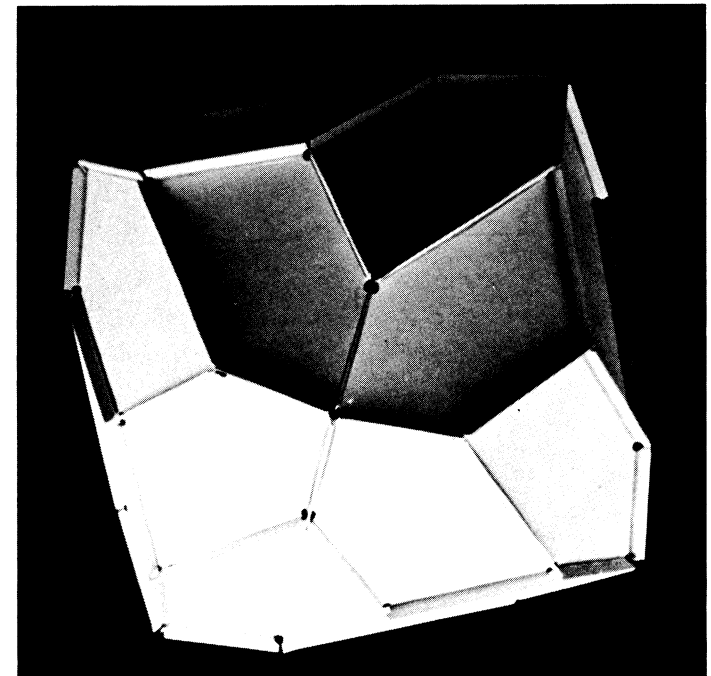
Vue 3 — View 3



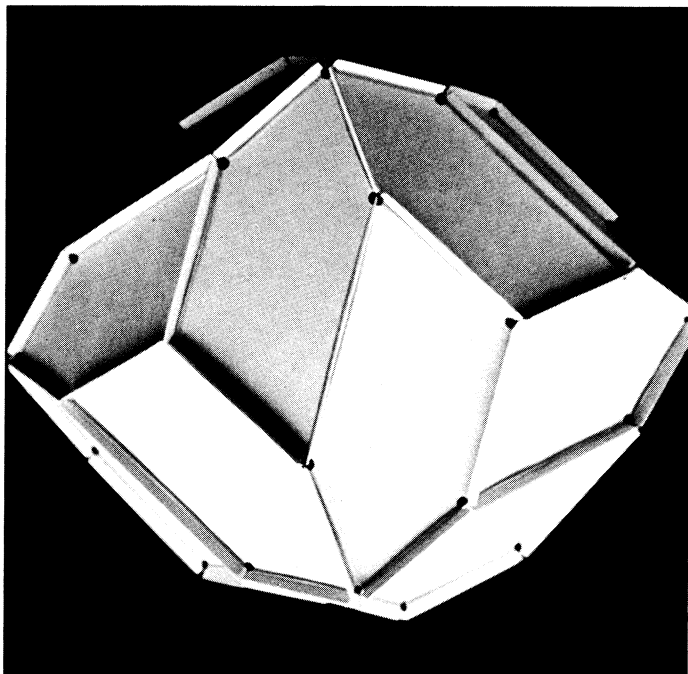
Vue 4 — View 4



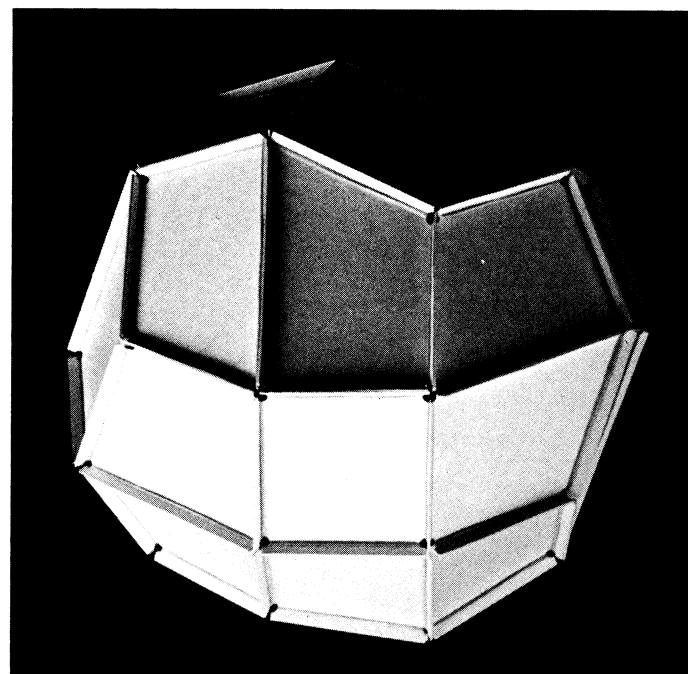
Vue 5 — View 5



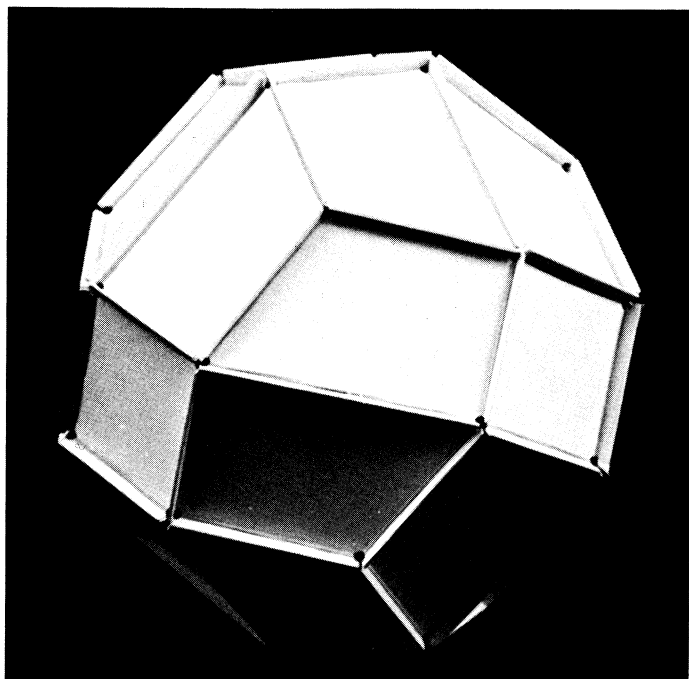
Vue 6 — View 6



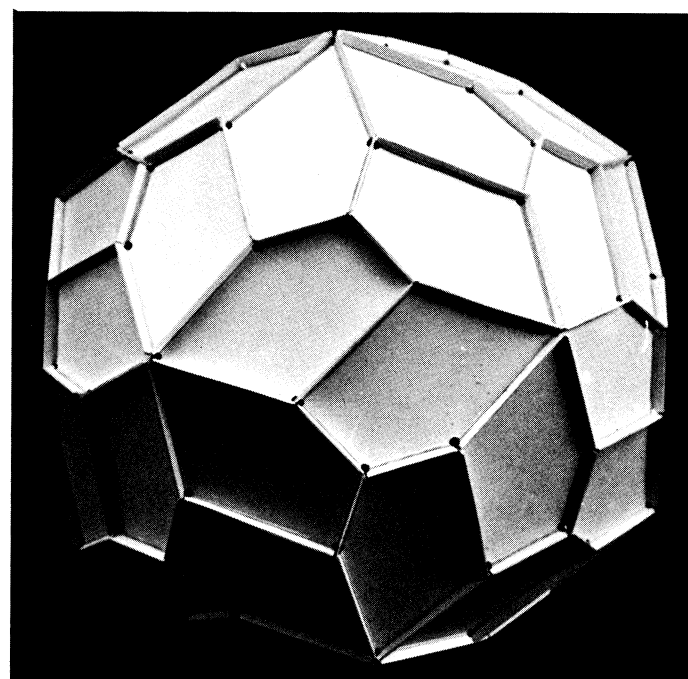
Vue 7 — View 7



Vue 8 — View 8

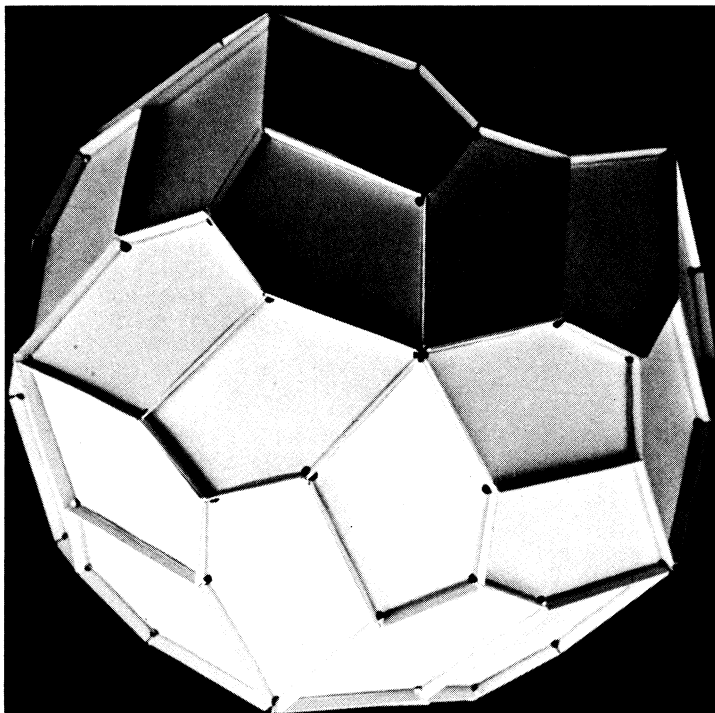


Vue 9 — View 9

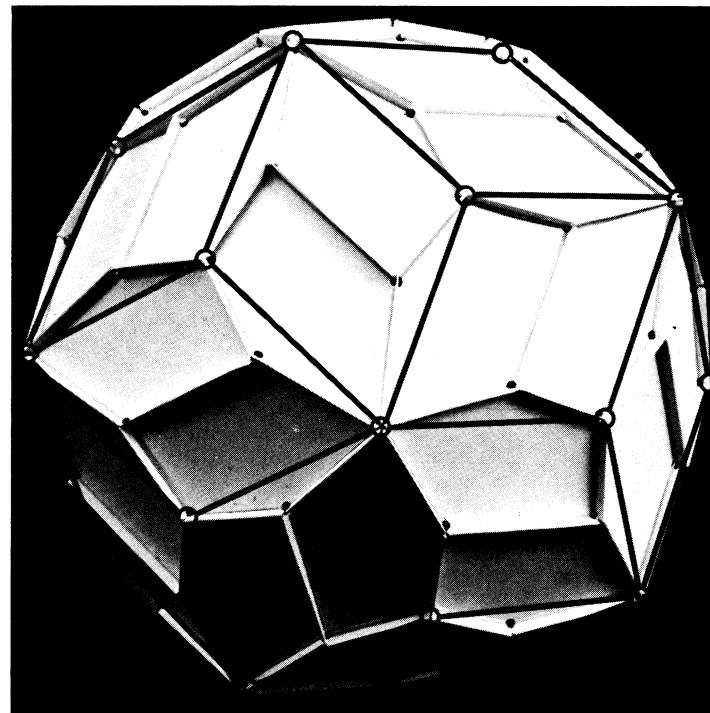


Vue 10 — View 10

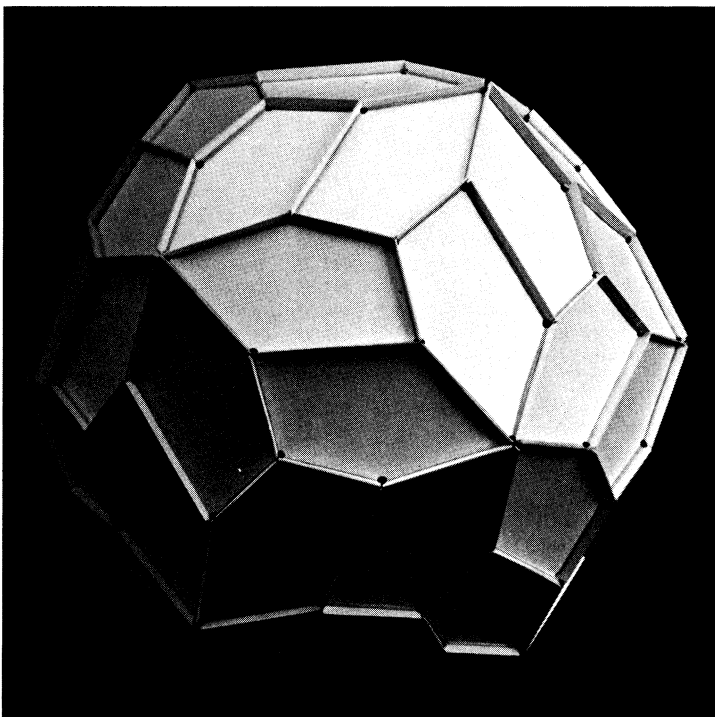
)



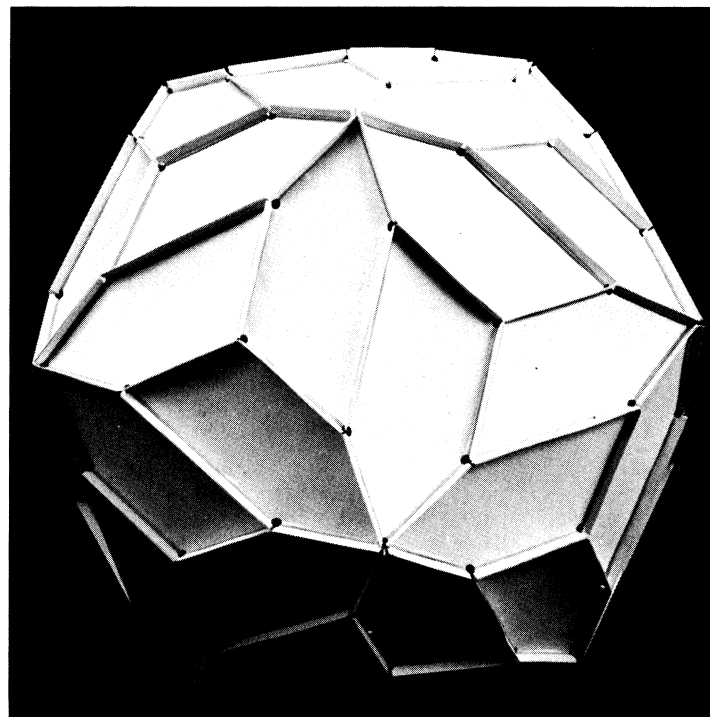
Vue 11 — View 11



Vue 12 — View 12



Vue 13 — View 13



Vue 14 — View 14

PROGRAMME TI-59

						160 44	SUM	210 02	2	260 43	RCL	310 75	—	360 42	STO	410 42	STO	460 42	STO	510 33	X ²	560 42	STO		
						161 29	CP	211 75	—	261 01	01	311 43	RCL	361 13	13	411 32	32	461 07	07	511 85	+	561 01	01		
						162 01	1	212 43	RCL	262 95	=	312 02	02	362 43	RCL	412 02	2	462 36	PGM	512 53	(562 42	STO		
						163 85	+	213 26	26	263 65	×	313 75	—	363 02	02	413 65	×	463 02	02	513 43	RCL	563 02	02		
						164 05	5	214 54)	264 53	(314 43	RCL	364 75	—	414 43	RCL	464 13	C	514 34	34	564 43	RCL		
						165 34	√X	215 95	=	265 01	1	315 01	01	365 43	RCL	415 12	12	465 01	1	515 75	—	565 39	39		
						166 95	=	216 42	STO	266 85	+	316 65	×	366 01	01	416 95	=	466 42	STO	516 43	RCL	566 42	STO		
						167 55	+	217 34	34	267 43	RCL	317 43	RCL	367 85	+	417 33	X ²	467 20	20	517 28	28	567 06	06		
						168 02	2	218 43	RCL	268 02	02	318 02	02	368 43	RCL	418 85	+	468 42	STO	518 54)	568 36	PGM		
						169 95	=	219 20	20	269 54)	319 95	=	369 01	01	419 53	(469 21	21	519 33	X ²	569 11	11		
000 43	RCL	040 34	√X	080 75	—	120 26	26	170 42	STO	220 75	—	270 95	=	320 55	÷	370 65	×	420 02	2	470 42	STO	520 85	+	570 16	A'
001 01	01	041 42	STO	081 43	RCL	121 71	SBR	171 26	26	221 43	RCL	271 42	STO	321 43	RCL	371 43	RCL	421 65	×	471 22	22	521 43	RCL	571 42	STO
002 42	STO	042 23	23	082 22	22	122 25	CLR	172 75	—	222 22	22	272 04	04	322 04	04	372 02	02	422 43	RCL	472 36	PGM	522 29	29	572 11	11
003 00	00	043 01	1	083 65	×	123 43	RCL	173 01	1	223 55	÷	273 43	RCL	323 95	=	373 95	=	423 15	15	473 02	02	523 33	X ²	573 36	PGM
004 99	PRT	044 42	STO	084 02	2	124 21	21	174 95	=	224 43	RCL	274 23	23	324 42	STO	374 55	÷	424 54)	474 15	E	524 95	=	574 11	11
005 29	CP	045 26	26	085 34	√X	125 55	+	175 42	STO	225 26	26	275 55	÷	325 14	14	375 43	RCL	425 33	X ²	475 54)	525 34	√X	575 17	B'
006 43	RCL	046 71	SBR	086 95	=	126 02	2	176 23	23	226 95	=	276 43	RCL	326 42	STO	376 04	04	426 95	=	476 92	RTN	526 42	STO	576 42	STO
007 02	02	047 25	CLR	087 35	1/X	127 34	√X	177 71	SBR	227 35	1/X	277 04	04	327 29	29	377 95	=	427 34	√X	477 76	LBL	527 36	36	577 12	12
008 22	INV	048 02	2	088 65	×	128 85	+	178 25	CLR	228 65	×	278 65	×	328 43	RCL	378 42	STO	428 42	STO	478 80	GRD	528 43	RCL	578 36	PGM
009 67	EQ	049 34	√X	089 53	(129 43	RCL	179 02	2	229 53	(279 53	(329 02	02	379 15	15	429 38	38	479 53	(529 32	32	579 11	11
010 34	√X	050 65	×	090 01	1	130 20	20	180 75	—	230 01	1	280 01	1	330 85	+	380 94	+/-	430 43	RCL	480 43	RCL	530 42	STO	580 18	C'
011 43	RCL	051 43	RCL	091 75	—	131 95	=	181 43	RCL	231 85	+	281 85	+	331 43	RCL	381 42	STO	431 10	10	481 31	31	531 06	06	581 42	STO
012 01	01	052 21	21	092 43	RCL	132 35	1/X	182 26	26	232 43	RCL	282 43	RCL	332 01	01	382 16	16	432 75	—	482 75	—	532 43	RCL	582 13	13
013 85	+	053 85	+	093 22	22	133 42	STO	183 95	=	233 22	22	283 02	02	333 85	+	383 43	RCL	433 43	RCL	483 43	RCL	533 38	38	583 43	RCL
014 01	!	054 43	RCL	094 54)	134 33	33	184 65	×	234 55	÷	284 85	+	334 43	RCL	384 09	09	434 08	08	484 27	27	534 42	STO	584 36	36
015 95	=	055 20	20	095 95	=	135 43	RCL	185 43	RCL	235 43	RCL	285 43	RCL	335 02	02	385 75	—	435 95	=	485 95	=	535 01	01	585 42	STO
016 35	1/X	056 95	=	096 42	STO	136 33	33	186 21	21	236 26	26	286 02	02	336 65	×	386 43	RCL	436 33	X ²	486 33	X ²	536 43	RCL	586 01	01
017 65	×	057 35	1/X	097 31	31	137 55	+	187 95	=	237 54)	287 65	×	337 43	RCL	387 08	08	437 85	+	487 85	+	537 39	39	587 42	STO
018 43	RCL	058 65	×	098 65	×	138 02	2	188 42	STO	238 95	=	288 43	RCL	338 01	01	388 95	=	438 53	(488 43	RCL	538 42	STO	588 02	02
019 01	01	059 53	(099 02	2	139 34	√X	189 05	05	239 42	STO	289 01	01	339 95	=	389 33	X ²	439 43	RCL	489 28	28	539 02	02	589 43	RCL
020 33	X ²	060 01	1	100 34	√X	140 95	=	190 85	+	240 31	31	290 54)	340 65	×	390 85	+	440 13	13	490 33	X ²	540 36	PGM	590 32	32
021 95	=	061 85	+	101 75	—	141 42	STO	191 43	RCL	241 85	+	291 95	=	341 43	RCL	391 53	(441 75	—	491 85	+	541 11	11	591 42	STO
022 42	STO	062 43	RCL	102 01	1	142 34	34	192 20	20	242 01	1	292 42	STO	342 23	23	392 43	RCL	442 43	RCL	492 53	(542 16	A'	592 06	06
023 02	02	063 21	21	103 95	=	143 43	RCL	193 95	=	243 95	=	293 08	08	343 55	÷	393 12	12	443 11	11	493 43	RCL	543 42	STO	593 36	PGM
024 76	LBL	064 54)	104 94	+/-	144 20	20	194 35	1/X	244 55	÷	294 42	STO	344 43	RCL	394 75	—	444 54)	494 37	37	544 08	08	594 11	11
025 34	√X	065 95	=	105 42	STO	145 75	—	195 65	×	245 43	RCL	295 27	27	345 04	04	395 43	RCL	445 33	X ²	495 75	—	545 99	PRT	595 16	A'
026 99	PRT	066 42	STO	106 37	37	146 43	RCL	196 53	(246 26	26	296 43	RCL	346 95	=	396 11	11	446 85	+	496 43	RCL	546 36	PGM	596 36	PGM
027 87	IFF	067 33	33	107 71	SBR	147 22	22	197 01	1	247 95	=	297 26	26	347 42	STO	397 54)	447 53	(497 29	29	547 11	11	597 11	11
028 04	04	068 43	RCL	108 80	GRD	148 95	=	198 75	—	248 94	+/-	298 55	÷	348 09	09	398 33	X ²	448 43	RCL	498 54)	548 17	B'	598 17	B'
029 42	STO	069 33	33	109 29	CP	149 35	1/X	199 43	RCL	249 42	STO	299 43	RCL	349 42	STO	399 85	+	449 16	16	499 33	X ²	549 42	STO	599 36	PGM
030 87	IFF	070 65	×	110 91	R/S	150 42	STO	200 05	05	250 37	37	300 04	04	350 10	10	400 53	(450 75	—	500 95	=	550 09	09	600 11	11
031 05	05	071 02	2	111 76	LBL	151 31	31	201 54)	251 71	SBR	301 65	×	351 43	RCL	401 43	RCL	451 43	RCL	501 34	√X	551 99	PRT	601 18	C'
032 43	RCL	072 34	√X	112 43	RCL	152 94	+/-	202 95	=	252 80	GRD	302 43	RCL	352 26	26	402 15	15	452 14	14	502 42	STO	552 36	PGM	602 00	0
033 87	IFF	073 75	—	113 29	CP	153 42	STO	203 42	STO	253 29	CP	303 01	01	353 55	+	403 75	—	453 54)	503 35	35	553 11	11	603 42	STO
034 06	06	074 01	1	114 01	1	154 37	37	204 33	33	254 91	R/S	304 95	=	354 43	RCL	404 43	RCL	454 33	X ²	504 43	RCL	554 18	C'	604 02	02
035 44	SUM	075 95	=	115 42	STO	155 71	SBR	205 85	+	255 76	LBL	305 42	STO	355 04	04	405 14	14	455 95	=	505 33	33	555 42	STO	605 54)
036 76	LBL	076 42	STO	116 23	23	156 80	GRD	206 01	1	256 25	CLR	306 11	11	356 95	=	406 54)	456 34	√X	506 75	—	556 10	10	606 92	RTN
037 42	STO	077 34	34	117 02	2	157 29	CP	207 95	=	257 53	(307 42	STO	357 4											