

Kubische Gleichungen mit TI-59

Peter Hofer

Für viele gehört das Rechnen mit quadratischen Gleichungen zum Allgemeinwissen. Dagegen ist das Lösen einer Gleichung dritten Grades schon ein anspruchsvoller mathematischer Seiltanz, bei dem man leicht hinunterfallen kann.

Das manuelle Auflösen von Gleichungen dritten Grades mit Hilfe der «Cardanischen Formel» ist recht umständlich und aufwendig, auch wenn alle notwendigen Rechenoperationen auf dem Taschenrechner verfügbar sind.

Das «Taschenbuch der Mathematik» von Bronstein-Semendjajew (1) diente mir als Grundlage für ein Programm auf dem TI-59, der dabei noch recht ins «Dribbeln» kommt. Unter anderem werden dritte Wurzeln aus komplexen Zahlen gezogen (ML-04), und da dies mit Hilfe der Trigonometrie geschieht und die Zwischenergebnisse zusätzlich noch zum Quadrat erhoben werden, leidet die Genauigkeit. Alle Resultate erscheinen darum auf sechs Stellen nach dem Komma gerundet. Für Lösungen kleiner als eins ist das System zu ungenau und nicht mehr gut geeignet. Bei der Resultatanzeige ist das Fixkomma wieder aufgehoben, hingegen kann der Winkelmodus noch auf «Radiant» sein.

Wie bei der quadratischen Gleichung gibt es auch bei der kubischen eine Diskriminante (Register 11), welche über Art und Anzahl der Lösungen Auskunft gibt:

- Diskriminante negativ: drei reelle Lösungen.
- Diskriminante Null: drei reelle Lösungen, wobei mindestens zwei Lösungen miteinander übereinstimmen. Ist auch der Wert Q im Speicher 09 Null, erhält man eine Dreifachlösung.
- Diskriminante positiv: eine reelle, zwei konjugiert komplexe Lösungen.

Es stehen zwei Programmversionen zur Verfügung: Eine komfortablere, welche die Lösungen auf dem Drucker ausgibt (eventuell die [R/S] durch [NOP] ersetzen, nicht «deleten»). Dieses Programm arbeitet

ohne Drucker in gleicher Weise wie die einfachere Version, welche für «unterwegs» gedacht ist, dafür bleibt aber in der zweiten Version noch etwas freier Speicherplatz.

Bedienungsanleitung

Gegeben: $ax^{**3} + bx^{**2} + cx + d = 0$; gesucht: x_1, x_2, x_3

Verwendung mit Drucker: 'E drücken, um benötigten Text zu generieren (Speicher 20 - 25).

Eingabe der Koeffizienten: a [A], b [B], c [C], d [D].

Hinweis: Da einige Speicher mehrfach benützt werden, müssen immer alle Koeffizienten, auch Null, eingegeben werden.

Das Programm läuft an und zeigt nach ca. sieben Sekunden durch Pause die Anzahl reeller Lösungen an: drei bzw. eine, wenn Diskriminante grösser Null. Der Exponent informiert gleichzeitig über die Anzahl identischer Lösungen. Der erste Stopp zeigt die erste reelle Lösung x_1 an. Erneuter Start berechnet x_2 bzw. den Realteil $x_{2,3}$ blinkend bei komplexer Lösung (der dazugehörige Imaginärteil ist jetzt bereits im T-Register). Nachmals Start ergibt x_3 bzw. den Imaginärteil in der positiven Form (das T-Register enthält jetzt den Realteil der komplexen Lösung).

Die Ergebnisse befinden sich zur weiteren Verwendung in folgenden Speichern: x_1 in R16, x_2 bzw. $x_{2,3}$ in R17, x_3 bzw. $x_{2,3}$ in R18, Imaginärteil in R19.

Beispiele

- 1) $2x^{**3} - 42x - 40 = 0$ $x_{1,2,3} = ?$
Eingabe: 2 [A], 0 [B], 42 [+/-] [C], 40 [+/-] [D]
Pause: 3 (es gibt drei reelle Lösungen, E = 0, somit keine Doppel- oder Dreifachlösungen)
Anzeige beim ersten Stopp: 5, [R/S] - 4, [R/S] - 1
- 2) $x^{**3} - 10x^{**2} + 33x - 36 = 0$
1 [A], 10 [+/-] [B], 33 [C], 36 [+/-] [D]
Pause: 3 EE 2 (es soll drei reelle Lösungen geben, wobei zwei identische)
Resultate: $x_1 = 4, x_2 = x_3 = 3$
- 3) $x^{**3} + 3x^{**2} + 3x + 1 = 0$
1 [A], 3 [B], 3 [C], 1 [D]
Pause: 3 EE 3 (eine Dreifachlösung)
Lösung: $x_1 = x_2 = x_3 = -1$
Unter anderem wegen dieser Aufgabe wurde das Fix-Komma auf sechs gesetzt
- 4) $2x^{**3} + 10x^{**2} + 82x - 390 = 0$
Pause: 1 (= eine reelle Lösung, zwei konjugiert komplexe Lösungen)
Lösung: $x_1 = 3, x_2 = -4 + 7i, x_3 = -4 - 7i$
- 5) $x^{**3} - x = 0$, also $x^{**3} + 0x^{**2} - x + 0 = 0$
Pause: 3
Lösungen: -1, 0, 1

Einige Details zum Programm

	ohne Drucker	mit/ohne Drucker
max. Laufzeit	20 Sekunden	25 Sekunden
belegte Speicher: für Programmcode	000 - 366	000 - 479
für Daten	01 - 19	01 - 25
T-Register	benützt	benützt
Labels: für Dateneingabe	A, B, C, D	A, B, C, D
für Druckaufbereitung	-	'E
direkte Adressierung.		
Ferner wird «ML-04» benützt, und der Winkelmodus kann auf «Radiant» sein (wenn Diskriminante negativ).		

PPC/HHC - Die Programmierbaren

Weitere Möglichkeiten

Gegeben: die quadratische Gleichung $x^{**2} - 7x + 12 = 0$; gesucht:

$x_{1,2}$

Vorgehen: multiplizieren mit x , also $x^{**3} - 7x^{**2} + 12x + 0 = 0$

Eingabe: wie bekannt

Pause: 3 (lies zwei, wir haben ja gemogelt)

Anzeige: 4, 0, 3; Die 0 ergibt sich aus der Multiplikation und fällt weg

Lösung: $x_1 = 3; x_2 = 4$

Gesucht: Kubik-Wurzel aus -27 ; k.k.

Wurzeln $x_{2,3}$

Vorgehen: in die Normalform setzen, also $x^{**3} + 0x^{**2} + 0x + 27 = 0$

Eingabe: wie bekannt, vergessen Sie die Nuller nicht

Pause: 1

Lösung: $x_1 = -3; x_{2,3} = 1,5 +/- 2.598076i$

Aufgaben

$$x^{**3} - x^{**2} + 2 = 0$$

$$x^{**3} + 5x^{**2} - 29x - 105 = 0$$

$$x^{**3} - 7x - 6 = 0$$

$$x^{**3} + 9x^{**2} + 27x + 27 = 0$$

$$x^{**3} - 3x^{**2} - 9x + 27 = 0$$

$$L = -1; 1 +/- i$$

$$L = -7; -3; 5$$

$$L = -2; -1; 3$$

$$L = -3; -3; -3$$

$$L = -3; 3; 3$$

Das Listing zur einfacheren Version ist bei der Redaktion (adressiertes und frankiertes Rückantwortcouvert beilegen) gratis, die Magnetkarten zu beiden Versionen sind gegen Einsendung von je Fr. 10.- erhältlich. Vermerk: «Hofer 82-6».

LISTING für Drucker-Version

```
000 76 LBL      014 42 STD
001 11 A        015 07 07
002 42 STD     016 00 0
003 05 05     017 91 R/S
004 00 0       018 76 LBL
005 91 R/S     019 14 D
006 76 LBL     020 42 STD
007 12 B       021 08 08
008 42 STD     022 53 (
009 06 06     023 53 (
010 00 0       024 02 2
011 91 R/S     025 65 x
012 76 LBL     026 43 RCL
013 13 C       027 06 06
```

```
028 65 x       097 55 +
029 43 RCL     098 02 2
030 06 06     099 54 )
031 33 X^2    100 42 STD
032 55 +      101 08 08
033 02 2      102 53 (
034 07 7      103 43 RCL
035 55 +      104 09 09
036 43 RCL    105 33 X^2
037 05 05    106 85 +
038 55 +      107 43 RCL
039 43 RCL    108 10 10
040 05 05    109 65 x
041 33 X^2    110 43 RCL
042 75 -      111 10 10
043 43 RCL    112 33 X^2
044 06 06     113 54 )
045 65 x      114 58 FIX
046 43 RCL    115 08 08
047 07 07    116 52 EE
048 55 +      117 22 INV
049 03 3      118 52 EE
050 55 +      119 22 INV
051 43 RCL    120 58 FIX
052 05 05     121 42 STD
053 33 X^2    122 11 11
054 85 +      123 94 +/-
055 43 RCL    124 29 CP
056 08 08     125 77 GE
057 55 +      126 02 02
058 43 RCL    127 96 96
059 05 05     128 01 1
060 54 )      129 32 X!T
061 55 +      130 71 SBR
062 02 2      131 02 02
063 54 )      132 62 62
064 42 STD    133 53 (
065 09 09     134 43 RCL
066 53 (      135 11 11
067 53 (      136 34 FX
068 03 3      137 42 STD
069 65 x      138 12 12
070 43 RCL    139 75 -
071 05 05     140 43 RCL
072 65 x      141 09 09
073 43 RCL    142 54 )
074 07 07     143 77 GE
075 75 -      144 01 01
076 43 RCL    145 55 55
077 06 06     146 50 IxI
078 33 X^2    147 22 INV
079 54 )      148 45 Yx
080 55 +      149 03 3
081 09 9      150 95 =
082 55 +      151 94 +/-
083 43 RCL    152 61 GTD
084 05 05     153 01 01
085 33 X^2    154 59 59
086 54 )      155 22 INV
087 42 STD    156 45 Yx
088 10 10     157 03 3
089 02 2      158 95 =
090 35 1/X    159 42 STD
091 94 +/-    160 13 13
092 42 STD    161 53 (
093 07 07     162 43 RCL
094 53 (      163 09 09
095 03 3      164 94 +/-
096 34 FX     165 75 -
166 43 RCL    209 65 x
167 12 12     210 43 RCL
168 54 )      211 04 04
169 77 GE     212 54 )
170 01 01     213 71 SBR
171 81 81     214 02 02
172 50 IxI    215 79 79
173 22 INV    216 42 STD
174 45 Yx     217 17 17
175 03 3      218 42 STD
176 95 =      219 18 18
177 94 +/-    220 43 RCL
178 61 GTD    221 24 24
179 01 01     222 69 DP
180 85 85     223 04 04
181 22 INV    224 43 RCL
182 45 Yx     225 17 17
183 03 3      226 69 DP
184 95 =      227 06 06
185 42 STD    228 53 (
186 15 15     229 53 (
187 53 (      230 43 RCL
188 43 RCL    231 13 13
189 13 13     232 75 -
190 85 +      233 43 RCL
191 43 RCL    234 15 15
192 15 15     235 54 )
193 54 )      236 65 x
194 42 STD    237 43 RCL
195 04 04     238 08 08
196 53 (      239 54 )
197 71 SBR    240 71 SBR
198 02 02     241 02 02
199 79 79     242 88 88
200 42 STD    243 42 STD
201 16 16     244 19 19
202 71 SBR    245 32 X!T
203 04 04     246 43 RCL
204 31 31     247 25 25
205 91 R/S    248 69 DP
206 53 (      249 04 04
207 43 RCL    250 43 RCL
208 07 07     251 19 19
```

Red. Der angekündigte Taschenrechner TI-88 wird aufgrund technischer Schwierigkeiten nicht in die Serienproduktion gehen. Dies teilte uns die Firma kürzlich telefonisch mit. Wir bedauern dies im Namen aller Texas- und AOS-Anhänger, die lange und zu Recht auf ein weiteres Gerät mit einem vorteilhaften Preis/Leistungsverhältnis gehofft haben. Der TI-58/ 59 lebt also weiter und soll auch künftig in unseren Spalten Beachtung finden.

Dem Vernehmen nach produziert Texas zurzeit einen zum TI-99/4 kompatiblen BASIC-HHC, den wir bei sich bietender Gelegenheit umfangreich vorstellen wollen.

PPC/HHC - Die Programmierbaren

252	69	DP	279	75	-	306	61	GTD	333	50	I×I
253	06	06	280	43	RCL	307	03	03	334	34	FX
254	43	RCL	281	06	06	308	31	31	335	42	STD
255	17	17	282	55	+	309	43	RCL	336	12	12
256	85	+	283	03	3	310	09	09	337	03	3
257	95	=	284	55	+	311	67	EQ	338	36	PGM
258	91	R/S	285	43	RCL	312	03	03	339	04	04
259	32	XIT	286	05	05	313	24	24	340	11	A
260	24	CE	287	54)	314	03	3	341	00	0
261	91	R/S	288	58	FIX	315	52	EE	342	36	PGM
262	43	RCL	289	06	06	316	02	2	343	04	04
263	20	20	290	52	EE	317	32	XIT	344	11	A
264	69	DP	291	22	INV	318	71	SBR	345	43	RCL
265	04	04	292	52	EE	319	02	02	346	09	09
266	00	0	293	22	INV	320	62	62	347	94	+/-
267	32	XIT	294	58	FIX	321	61	GTD	348	36	PGM
268	98	ADV	295	92	RTN	322	03	03	349	04	04
269	66	PAU	296	43	RCL	323	31	31	350	16	A'
270	69	DP	297	11	11	324	03	3	351	43	RCL
271	06	06	298	67	EQ	325	52	EE	352	12	12
272	98	ADV	299	03	03	326	03	3	353	36	PGM
273	22	INV	300	09	09	327	32	XIT	354	04	04
274	52	EE	301	03	3	328	71	SBR	355	16	A'
275	92	RTN	302	32	XIT	329	02	02	356	36	PGM
276	65	×	303	71	SBR	330	62	62	357	04	04
277	02	2	304	02	02	331	43	RCL	358	15	E
278	54)	305	62	62	332	11	11	359	42	STD

Literatur

(1) Bronstein-Semendjajew:
Taschenbuch der Mathematik,
Verlag Harri Deutsch, Zürich
und Frankfurt/M, 1971

360	13	13	420	42	STD
361	00	0	421	18	18
362	32	XIT	422	43	RCL
363	42	STD	423	23	23
364	14	14	424	69	DP
365	53	(425	04	04
366	43	RCL	426	43	RCL
367	13	13	427	18	18
368	71	SBR	428	69	DP
369	02	02	429	06	06
370	76	76	430	91	R/S
371	42	STD	431	43	RCL
372	16	16	432	21	21
373	71	SBR	433	69	DP
374	04	04	434	04	04
375	31	31	435	43	RCL
376	91	R/S	436	16	16
377	53	(437	69	DP
378	43	RCL	438	06	06
379	13	13	439	92	RTN
380	65	×	440	76	LBL
381	43	RCL	441	10	E'
382	07	07	442	02	2
383	75	-	443	07	7
384	43	RCL	444	42	STD
385	14	14	445	20	20
386	65	×	446	05	5
387	43	RCL	447	52	EE
388	08	08	448	03	3
389	54)	449	42	STD
390	71	SBR	450	21	21
391	02	02	451	42	STD
392	76	76	452	22	22
393	42	STD	453	42	STD
394	17	17	454	23	23
395	43	RCL	455	02	2
396	22	22	456	44	SUM
397	69	DP	457	21	21
398	04	04	458	44	SUM
399	43	RCL	459	23	23
400	17	17	460	44	SUM
401	69	DP	461	23	23
402	06	06	462	03	3
403	91	R/S	463	44	SUM
404	53	(464	22	22
405	43	RCL	465	05	5
406	13	13	466	00	0
407	65	×	467	00	0
408	43	RCL	468	03	3
409	07	07	469	00	0
410	85	+	470	04	4
411	43	RCL	471	42	STD
412	14	14	472	24	24
413	65	×	473	02	2
414	43	RCL	474	04	4
415	08	08	475	42	STD
416	54)	476	25	25
417	71	SBR	477	25	CLR
418	02	02	478	01	1
419	76	76	479	92	RTN

Red. 1979 erschien beim Oldenbourg Verlag (München/Wien) ein Buch «Die Programmierbaren von HP» von Dipl.-Phys. Richard Eckert, dem - anfänglich nur als Insider-Tip herumgeboten - schliesslich ein grosser Erfolg beschieden war.

Ganz offenbar aufbauend auf dieser grossen Nachfrage gibt derselbe Autor nun das Buch «Die Programmierbaren von TI» (Oldenbourg, 1982) heraus. Mit seinem Vorgänger ist dieses Werk vergleichbar in seiner schlichten Aufmachung, in seinem Adressatenkreis und in seiner Güte. Mit Adressaten sind gemäss Vorwort TI-Benützer gemeint, die als Ergänzung und/oder Vertiefung zu den Handbüchern weitere Hinweise, echt durchgeklügelte Tricks und mehr Beispiele wünschen.

Das 200-Seiten-Buch beginnt ganz «unten», bei den Grundrechenarten, Kettenrechnungen und erläutert, wie diese mit der AOS-Logik schnell, tastensparend und möglichst ohne Speicherbelegung durchgerechnet werden können. Verblüffend rassig gelangt der Autor aber zu fortgeschritteneren Aufgaben bis hin zu Differential- und Integralrechnungen. Diese in alle Kapitel eingestreuten Beispiele stammen aus der Technik, der Physik und Kernphysik, Finanzmathematik, Statistik usw.

Das Schwergewicht des Buchs wird auf das Programmieren gelegt. Die Programmierertechnik wird mit einfachen Linearprogrammen beginnend aufgebaut, Flag- und Schleifensteuerungen werden gut eingeführt, erläutert und sofort anhand von Beispielen vertieft.

Formal ist das Buch übersichtlich gegliedert, es schliesst mit sich über mehrere Seiten hinziehenden Listings und Benutzeranleitungen zu allen gelieferten Programmbeispielen sowie einem Stichwortregister ab.

Alle Beispiele beziehen sich auf die Rechner TI-53, TI-58 und TI-59 in deren Standardausführung, also ohne Berücksichtigung von Pseudocodes und HIR-Befehlen. Die neusten LCD-Modelle sind nicht mehr berücksichtigt, was aber nicht unbedingt ein Mangel ist, verfügen doch diese Rechner zwar über viele interessante Funktionen aber über eine eher magere Programmierbarkeit.