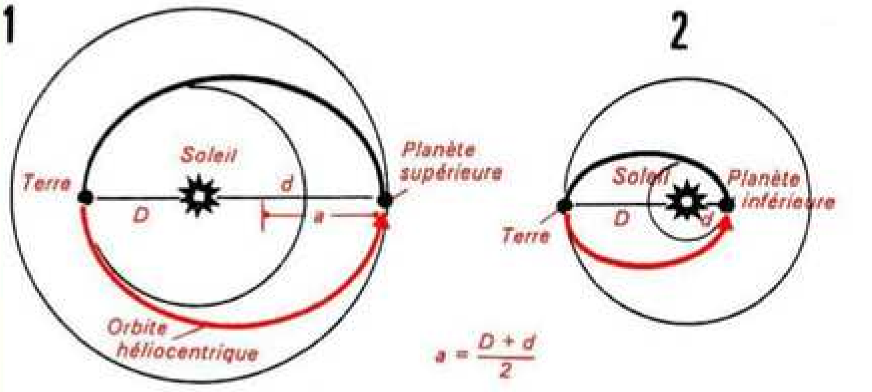
LA CALCULETTE DE L'ASTRONOME

Missions spatiales dans le système solaire

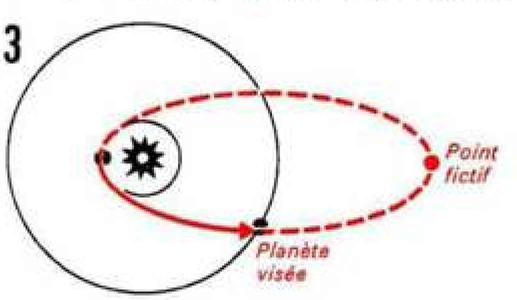
Nous vous proposons de calculer la vitesse qu'il faut communiquer à une sonde spatiale, au départ de la Terre, pour atteindre de la façon la plus « économique » n'importe quel astre du système solaire, ainsi que la durée du voyage.

Appliqué aux planètes, ce problème a fait l'objet d'intéressantes études dès avant l'ère spatiale, puisqu'en 1925 l'Allemand Walter Hohman avait défini les trajectoires optimales pour ce genre d'exploration. Il a d'ailleurs laissé son nom à ce type d'orbites, dites ellipses de Hohman. Il s'agit d'orbites héliocentriques qui sont tangentes, au départ, à l'orbite terrestre, et tangentes à l'arrivée à l'orbite de la planète visée. Dans le cas de planètes « supérieures » (extérieures à la Terre) le périhélie des orbites de Hohman se place donc à la distance de la Terre et l'aphélie au niveau de la planète considérée. C'est l'inverse pour les planètes inférieures (Mercure, Vénus). Quant à la durée du transfert, elle est évidemment égale à la demi-période de révolution sur cette ellipse bitangente **(schémas 1 et 2).**



Ellipses de Hohman

Dans la pratique, on a toujours substitué aux ellipses de Hohman des orbites sécantes, de plus grande excentricité, qui permettent de raccourcir de 20 à 25 % la durée du vol. Mais c'est évidemment au détriment de la dépense d'énergie (donc de la charge utile) puisque cela revient à viser un astre fictif plus éloigné **(schéma 3).**



Orbite sécante

Précisons en outre que ces tirs planétaires sont tributaires de « fenêtres » de lancement, car il convient que le vol de la sonde spatiale encadre une conjonction ou une opposition de la planète visée. La périodicité de ces « fenêtres » est liée à la durée de révolution *synodique* des planètes en question, c'est-à-dire du temps qu'il faut pour qu'une planète donnée se retrouve dans la même position relative par rapport à la Terre compte tenu des périodes de révolution respectives des deux astres. Cette durée se calcule avec la formule :

$$1/T_{syn} = 1/365.25 - 1/T_p$$

T_p étant la période de révolution de la planète considérée.

On a ainsi le tableau suivant pour la périodicité des fenêtres planétaires :

Mercure	115,88 jours
Vénus	583,92 jours
Mars	779,94 jours
Jupiter	398,88 jours
Saturne	378,09 jours
Uranus	369,66 jours

On constatera, résultat paradoxal à première vue, que les planètes lointaines peuvent être visées dans des conditions économiques plus souvent que les planètes proches comme Vénus et Mars.

Notre calcul correspondra au modèle optimal, c'est-à-dire à une ellipse de Hohman.

1. Détermination de la distance Terre-Soleil au moment du lancement.

La distance de la Terre au Soleil, variable tout au long de l'année, influera en effet sur la vitesse à communiquer. La loi des aires, énoncée par Kepler, implique qu'un astre circulant sur une orbite non circulaire sera plus rapide dans sa partie périhélique que dans sa partie aphélique. Autrement dit, il n'y a pas symétrie dans la distance Terre-Soleil en fonction du temps. Pour la Terre, toutefois, l'écart au demi-grand axe reste toujours inférieur à 2 % si bien que cette variation peut être considérée comme symétrique et donc assimilée à une sinusoïde.

Nous avons ainsi :

$D = 149.598\ 10^9 + 2.5\ 10^9 \sin(.9\ 856\ n)$.

n étant le nombre de jours écoulés depuis le 3 avril, date à laquelle cette distance Terre-Soleil est à sa valeur moyenne.

2. Calcul de la vitesse orbitale de la Terre.

Au moment considéré cette vitesse vaut :

$V_t = 29\ 786 - 248 \sin(.9\ 856\ n)$.

29 786 m/s correspond à la vitesse orbitale moyenne de notre planète, 248 m/s à la demi-amplitude de cette vitesse, et n a été défini précédemment. Là encore, nous assimilons la variation de cette vitesse à une fonction sinusoïdale, ce qui est une approximation satisfaisante.

3. Vitesse solaire de la sonde spatiale, suivant la distance (d) de l'astre visé.

$V_s = V_t \sqrt{d/a}$

a est le demi-grand axe de l'orbite héliocentrique de la sonde. C'est évidemment la demi-somme de la distance de la Terre et de celle de la planète :

$$a = \frac{D + d}{2}$$

Il s'agit bien là, précisons-le, de la vitesse dans le système solaire. Pour obtenir la vitesse de notre sonde par rapport à la Terre, il convient de retrancher la vitesse orbitale de cette dernière :

$$V_r = V_s - V_t$$

V_r étant appelée « vitesse résiduelle ».

4. Calcul de la vitesse d'injection. C'est la vitesse que la fusée doit atteindre en fin de combustion pour placer la sonde sur l'orbite solaire voulue.

Elle vaut :

$$V_i = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$$

V_e étant la vitesse de libération terrestre pour l'altitude considérée. Elle se calcule simplement par la formule :

$$V_e = \sqrt{\frac{2\ GM_t}{h + R}}$$

Pour la Terre $GM_t = 3.98601\ 10^{14}$

h : altitude

R : rayon équatorial (6 378 km) (mais attention à les exprimer en mètres).

Notre premier résultat sera donc V_i, vitesse à atteindre par la fusée porteuse de notre sonde spatiale, à l'altitude fixée au-dessus de la surface terrestre, pour que cette sonde se place sur une orbite héliocentrique dont l'aphélie (ou le périhélie si l'on vise une planète « inférieure ») se situera au niveau de l'objectif visé. Il faut maintenant, bien entendu, calculer la durée du transfert pour que l'astre en question soit bien au rendez-vous.

5. Calcul de la durée du transfert. Il s'agit d'abord de déterminer la période de révolution sur cette orbite héliocentrique et pour cela nous ferons tout naturellement appel à la troisième loi de Kepler (voir notre rubrique du n° 747, décembre 1979).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_s}}$$

Attention : cette fois il faut prendre pour GM la valeur correspondant au soleil, soit :

$$GM_s = 1.3272\ 10^{20}$$

Cette période étant exprimée en secondes, il faudra faire la conversion en jours (compte tenu des durées en jeu) et diviser le tout par 2 puisque l'astre est atteint après une demi-révolution.

Nous avons donc finalement :

$$T_v = \frac{T}{86\,400 \times 2} = \frac{T}{172\,800}$$

Notre second résultat sera T_v.

Application : Mission vers l'astéroïde Cérès. Distance au soleil : 413 830 000 km. Lancement le 1er juin (n = 59). Fin de combustion de la fusée à 180 km d'altitude au-dessus de la surface terrestre.

1. $D = 149.598\ 10^9 + 2.5\ 10^9 \sin(.9856 \times 59) = 151{,}72\ 10^6$ km.

2. $V_t = 29.786\ 10^3 - 248 \sin(.9856 \times 59) = 29.57$ km/s.

3. $V_s = 29.57\sqrt{413.83/282.776} = 35.78$ km/s.

$V_r = 35.78 - 29.57 = 6{,}21$ km/s.

4. $V_e = \sqrt{\frac{2 \times 3.98601\ 10^{14}}{6.558\ 10^6}} = 11.02$ km/s.

$V_i = \sqrt{(11.02)^2 + (6{,}21)^2} = 12.65$ km/s.

5. $T = 6.28\sqrt{\frac{(282.776\ 10^9)^3}{1.3272\ 10^{20}}} = 8.201\ 10^7$

$T_v = 8.201\ 10^7/172\,800 = 474{,}6$ j.

La sonde spatiale expédiée vers Cérès atteindra donc son objectif après 474,6 jours de vol (conditions optimales). La fusée devra lui communiquer, à 180 km d'altitude, une vitesse de 12,65 km/s, soit 45 540 km/h.

$D = 149.598\ 10^9 + 2.5\ 10^9 \sin .9856\ n$

$V_t = 29.786 - 248 \sin .9856\ n$

$V_s = V_t\sqrt{d/a}$ avec $a = \frac{D + d}{2}$

$V_r = V_s - V_t$

$V_e = \sqrt{\frac{2\ GM_t}{h + R}}$

$V_i = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_s}}$

$T_v = T/172\,800$

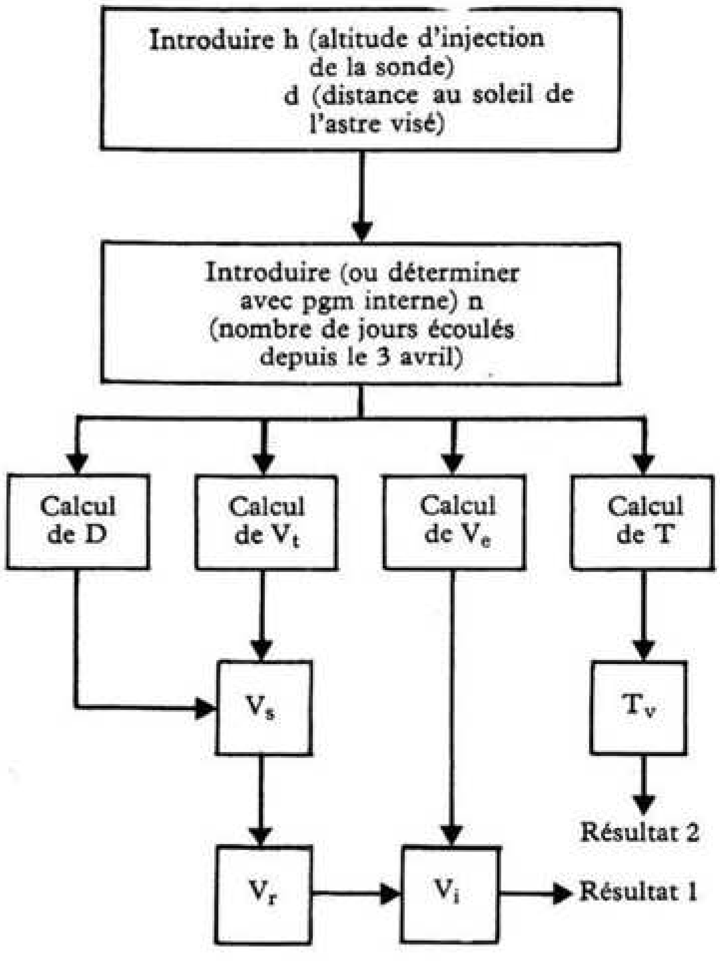
Constantes : $R = 6.378\ 10^6$

$GM_t = 3.98601\ 10^{14}$

$GM_s = 1.3272\ 10^{20}$

Programme pour TI-58, TI-59

000	LBL A		R/S
	STO 00		LBL D
	R/S		RCL 07
	LBL B		+
	STO 05	020	.
	R/S		2
010	LBL C		=
	STO 07		PGM 20



```
A
RCL 04
—
7
3
0
5
7
8
=
×
.
9
8
5
6
=
DEG
sin
STO 04
×
2
5
EE
5
+
1
4
9
5
9
8
EE
3
+
RCL 05
=
÷
2
=
STO 01
1/x
×
RCL 05
=
√x
—
1
=
×
(
2
9
.
7
8
6
—
.
2
4
8
×
RCL 04
)
=
x²
+
7
9
7
2
0
0
÷
(
6
3
7
8
+
RCL 00
)
=
√x
INV EE
R/S
RCL 01
×
√x
÷
1
0
0
2
EE
7
=
INV EE
R/S
```

Instructions

Le programme une fois entré, introduire h (en km) en A, d (en km) en B et le jour de l'année en C, sous la forme MMJJ (MM = mois, JJ = jour). Appuyer sur D : V_i apparaît en km/s. Faire R/S : T_v apparaît, en jours.

Pour l'exemple cité plus haut, introduire 180 en A, 413 830 000 en B, 601 en C (6 pour juin, 01 pour le premier jour du mois), appuyer sur D : 12 65 apparaît. Faire R/S : 474.56 apparaît, soit 474.6 jours.

Pour corriger une donnée, la rentrer en A, B, ou C, et faire D.

Programme pour HP-25 et HP-33

```
↑
RCL 6
×
sin
STO 7
2
5
EEX
5
×
RCL 2
+
RCL 1
+
2
÷
STO ÷ 1
↑
√x
×
RCL 3
÷
R/S
RCL 4
.
2
4
8
RCL 7
×
—
RCL 1
√x
1
—
×
x²
RCL 0
6
3
7
8
+
1/x
RCL 5
×
+
√x
GTO 00
```

Instructions

Le programme une fois entré, mettre 149 598 EEX 3 en STO 2; 1 002 EEX 7 en STO 3; 29.786 en STO 4; 797 200 en STO 5; 0.9856 en STO 6. Se placer en mode DEGRÉS. Ensuite, introduire h (en km) en mémoire 0, d (en km) en mémoire 1, écrire n (nombre de jours écoulés depuis le 3 avril dernier) et taper GSB 01 (pour les HP-25 : GTO 00 puis R/S) : T_v apparaît, en jours; faire R/S : V_i apparaît, en km/s.

Pour l'exemple cité plus haut, entrer 180 STO 0, 413 830 000 STO 1, 59 et faire GSB 01 : 474.56 apparaît, soit 474.6 jours. Après R/S, apparaît 12.65 km/s.

Attention : le contenu de la mémoire 1 est modifié en cours de programme.

Note

Ces deux programmes ne suivent pas fidèlement l'ordre des calculs énoncés dans le texte. Une partie en a été faite à l'avance afin de réduire le nombre de constantes utilisées.

Il est inutile de conserver les résultats avec plus de quatre chiffres significatifs.

Pierre KOHLER

Programmation Daniel FERRO □