CALCULETTE DE L'ASTRONOME

PROGRAMMEZ UN RENDEZ-VOUS DANS L'ESPACE

► Une fois n'étant pas coutume, nous vous proposerons ce mois un calcul-jeu. Il s'agit en l'occurrence d'appliquer de façon distrayante le principe du rendez-vous spatial, qui n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire à première vue.

Les lois de la mécanique céleste sont telles en effet qu'à chaque altitude au-dessus de la Terre correspond une période de révolution bien déterminée. Pour rattraper un satellite-cible placé devant lui, un satellite-chasseur ne peut donc se contenter d'augmenter sa vitesse, comme on le ferait sur une route. Car en orbite, toute augmentation de vitesse se traduit par une augmentation d'altitude au point opposé. Inversement, une diminution de vitesse entraîne une perte d'altitude après un demi-tour : c'est ainsi qu'en mettant à feu une rétro-fusée aux antipodes de leur point d'arrivée, les satellites récupérables regagnent les couches denses de l'atmosphère.

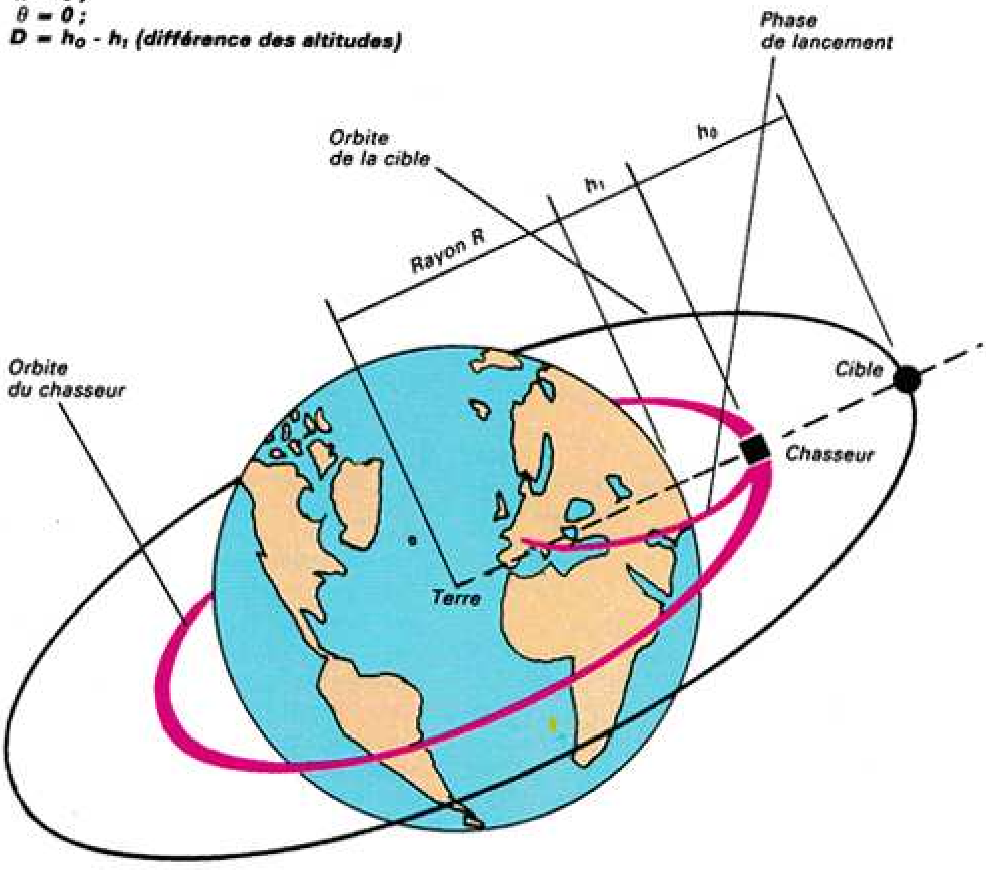
Pour qu'un satellite rejoigne un autre satellite, qu'il s'agisse d'une opération de rendez-vous spatial ou d'une interception, le satellite chasseur doit effectuer ainsi une série de manœuvres qui l'amènent tantôt au-dessus, tantôt au-dessous de sa cible, de manière à rattraper celle-ci par le jeu des différences de périodes de révolution. Il faut donc jouer tout à la fois sur l'altitude et l'écart angulaire, et faire en sorte que tous deux deviennent nuls.

Afin de simplifier au maximum le calcul, qui sans cela ne serait d'ailleurs pas exécutable sur calculettes, nous avons choisi de jouer sur des demi-orbites, alors qu'en pratique les manœuvres se font sur des arcs d'orbite pour gagner du temps. Mais cela importe peu ici, l'essentiel étant de mettre en évidence le mécanisme des rendez-vous orbitaux, et de les réaliser en un nombre minimal de demi-orbites. Par ailleurs – du moins pour ce premier exercice – nous supposerons une réserve illimitée de propergols, cela permettant autant de manœuvres que nécessaire. Ici, donc, votre patience seule sera la limite... Nous supposerons aussi que chasseur et cible circulent dans le même plan, c'est-à-dire sous une même inclinaison et une longitude de nœud ascendant identiques par rapport à l'équateur.

Ce calcul-jeu peut donc se poursuivre indéfiniment, le but étant de faire arriver le chasseur à moins de 100 mètres de la cible, car à cette distance il est admis que l'accostage ne pose plus de problèmes, et cela en un minimum de "coups", c'est-à-dire de demi-orbites.

Les formules utilisées sont celles de la troisième loi de Képler (pour déterminer les périodes de révolution) et de la résolution du triangle, qui à chaque fois permet de calculer la distance séparant les deux satellites, d'après leurs altitudes respectives et leur écart angulaire.

$n = 0$;
$\theta = 0$;
$D = h_0 - h_1$ (différence des altitudes)



***Pour illustrer notre exemple de rendez-vous,** nous avons pris le cas de deux vaisseaux en orbite autour de la Terre. Il est évident que l'on peut remplacer la Terre par toute autre planète ou satellite du système solaire. Dans ce cas, seules changeront les valeurs de R (rayon de la planète ou du satellite) et de GM, produit de la constante de gravitation ($G = 6{,}67.10^{-8}$ cm^3/g.s^2) par la masse M de la planète.*

Dessin L. Delplanque

Formulation

(voir dessin ci-dessus)

A entrer :

h_0 : altitude (orbite circulaire) de la cible (en km)

h_1 : altitude initiale du chasseur (en km)

A noter que l'on suppose que la cible se trouve juste à la verticale du chasseur au moment précis de l'injection en orbite de ce dernier.

Initialiser $n = 0$ et $\theta = 0$

n : nombre de révolutions (orbites)

θ : séparation angulaire entre le vaisseau cible et le vaisseau chasseur.

En mémoire :

R : rayon de l'astre considéré (pour la Terre R = 6378 km ; pour la Lune R = 1738 km)

GM : produit de la constante de gravitation par la masse de l'astre central, qui intervient dans la formule de Képler (pour la Terre GM = $3.98617\ 10^{14}$; pour la Lune GM = $4.89725\ 10^{12}$)

1. Calcul de la période de révolution de la cible (fixe)

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

avec $a = (h_0 + R) \times 10^3$

T est exprimé en secondes, a, en mètres.

si $\Delta T < 0$: chasseur en retard

si $\Delta T > 0$: chasseur en avance

$\theta = \theta + \Delta\theta$

4. Distance chasseur-cible

$$D = \sqrt{a^2 + A^2 - 2aA\cos\theta}$$

(D en mètres)

avec $\Delta\theta = \dfrac{\Delta T \times 360}{T_0}$

(affecter à θ le signe de ΔT, calculé en 7.)

9. Distance entre les deux satellites

$$D = \sqrt{a^2 + A^2 - 2aA.\cos\theta}$$

COMPLÉMENT D'INFORMATION

Dans notre rubrique parue en juin 1982 (Science & Vie n° 777, p. 132) et titrée « Mesurez les taches du Soleil », nous avons présenté, par souci de simplification, la position de l'équateur solaire telle qu'elle se présente début janvier et début juillet. Mais, aux autres périodes de l'année, l'inclinaison de cet équateur prend, bien entendu, différentes valeurs. Or, de nombreux lecteurs nous ont écrit pour connaître cette position de l'équateur solaire avec plus de précision. Aussi est-ce pour répondre à leur souhait que nous donnons ci-dessus les différentes représentations de l'image du Soleil, projetée sur un écran placé derrière l'oculaire d'une lunette ou d'un télescope. Notons que cette image étant inversée, nous avons donc le sud en haut, les taches apparaissant au bord droit, c'est-à-dire à l'est.

---

2. Calcul de la période de révolution du chasseur

(variable)

La poursuite commence seulement après une demi-orbite, le chasseur ayant parcouru celle-ci à l'altitude h_1.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{A^3}{GM}}$$

avec $A = (h_1 + R) \times 10^3$

3. Écart angulaire chasseur-cible au début de la poursuite après une demi orbite

$$\Delta\theta = \frac{\Delta T \times 360}{T_0}$$

avec $\Delta T = \dfrac{T_0 - T_1}{2}$

5. Sommation du nombre d'orbites

$n = n + 0.5$

6. Fixer l'altitude du point opposé de l'orbite du chasseur pour la première manœuvre (h_2) et recalculer A, puis T_n

$$A = \left(\frac{h_1 + h_2}{2} + R\right) \times 10^3$$

$$T_n = 2 \sqrt{\frac{A^3}{GM}}$$

7. Différence de période après cette demi-orbite

$$\Delta T = \frac{T_0 - T_n}{2}$$

8. Écart angulaire

$\theta = \theta + \Delta\theta$

(afficher θ et D, le signe de θ indiquant si le chasseur est en avance ou en retard).

Test :

Est-ce que $D < 100$ m ?

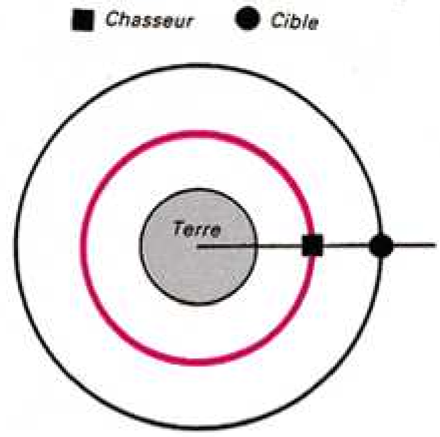
Si oui, arrêt du calcul et affichage de n.

Si non, retour en **5.** avec une nouvelle valeur de h_2, l'ancienne devenant h_1.

Application

La navette spatiale, placée initialement sur une orbite à 240 km d'altitude, doit rejoindre le télescope spatial, qui tourne à 500 km, afin de le ramener dans sa soute sur Terre pour révision (ce genre d'opération sera effectué en 1990).

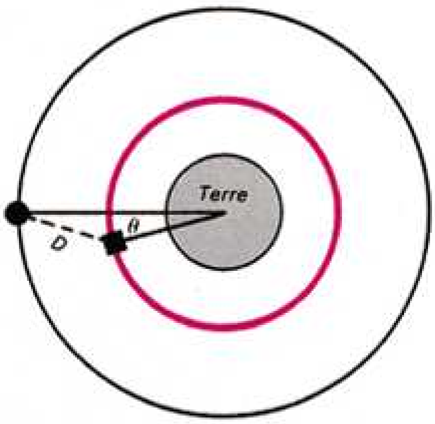
Dessins L. Delplanque



n = 0 ; h_0 = 500 ;
θ = 0 ; h_1 = 240.

Essayez de rejoindre ce satellite-observatoire en un minimum d'orbites.

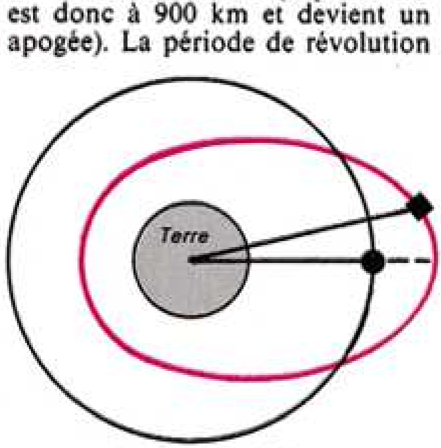
A 240 km, la navette est plus rapide parce que plus basse. Après une demi-orbite, au début de la poursuite,



n = 0,5 ; D = 1217 km.
θ = 10.1° ;

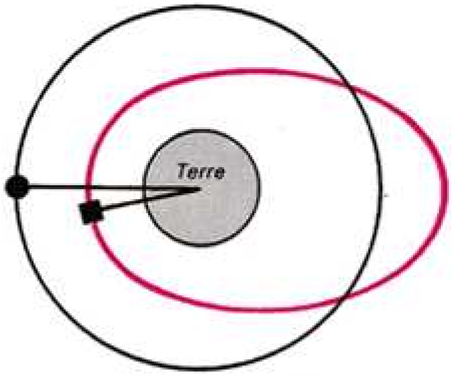
elle a une avance angulaire de 10,1° et se trouve en avance de D = 1217 km. Voici les premiers résultats d'un essai :

n = 1 ; orbite 240/900 (le point visé est donc à 900 km et devient un apogée). La période de révolution



n = 1 ; h_1 = 240 km ;
θ = 7,86° ; h_2 = 900 km.

de la navette devient plus longue, ce qui permet de ramener l'écart angulaire à 7,86° pour une distance à la cible de 949 km.
Si ensuite on impose au périgée d'être à 350 km (h_2 vaut donc 350 km), on obtiendra un écart angulaire toujours positif de 3,43°,



n = 1,5 : h_1 = 900 km ;
θ = 3,43° ; h_2 = 350 km.

et une distance qui a diminué puisqu'elle vaut 433 km.
Il faut donc continuer à s'approcher de la cible par une série de manœuvres plus fines, avec des écarts d'altitude plus faibles. A vous de jouer. Nous serons heureux de publier la séquence la plus rapide que nos lecteurs auront trouvée pour parvenir à moins de 100 mètres de l'objectif.

Cet exercice peut également se faire en imaginant un rendez-vous spatial entre le module lunaire décollant de la Lune (placé initialement sur une orbite circulaire à 15 km d'altitude) et la cabine Appolomère, qui l'attend à 100 km.

SOLUTION DU NUMÉRO PRÉCÉDENT

« Comment relever les coordonnées d'un astre sur un cliché astromique »

Programme pour TI-58, 59

```
000 LBL A
    −
    x ⇄ t
    =
    ×
    1
    5
    =
    x²
010 STO 00
    R/S
    −
    x ⇄ t
    =
    x²
    +
    RCL 00
020 =
    √x
    STO 01
    R/S
    −
    x ⇄ t
    =
    x²
    STO 00
031 R/S
    −
    x ⇄ t
    =
    x²
    +
    RCL 00
    =
040 √x
    INV PRD 01
    RCL 01
    R/S
    LBL B
    STO 02
051 |x|
    INV PRD 02
    ×
    2
    −
    3
    =
060 STO 03
    R/S
    STO 05
    x ⇄ t
    STO 04
    R/S
    −
070 x ⇄ t
    =
    |x|
    ÷
    1
    5
    ×
    RCL 01
    ×
080 RCL 03
    =
    INV SUM 04
    R/S
    −
    x ⇄ t
    =
```

(suite)

```
090 |x|
    ×
    RCL 01
    ×
    RCL 02
    =
    SUM 05

100 RCL 05
    x ⇄ t
    RCL 04

105 R/S
```

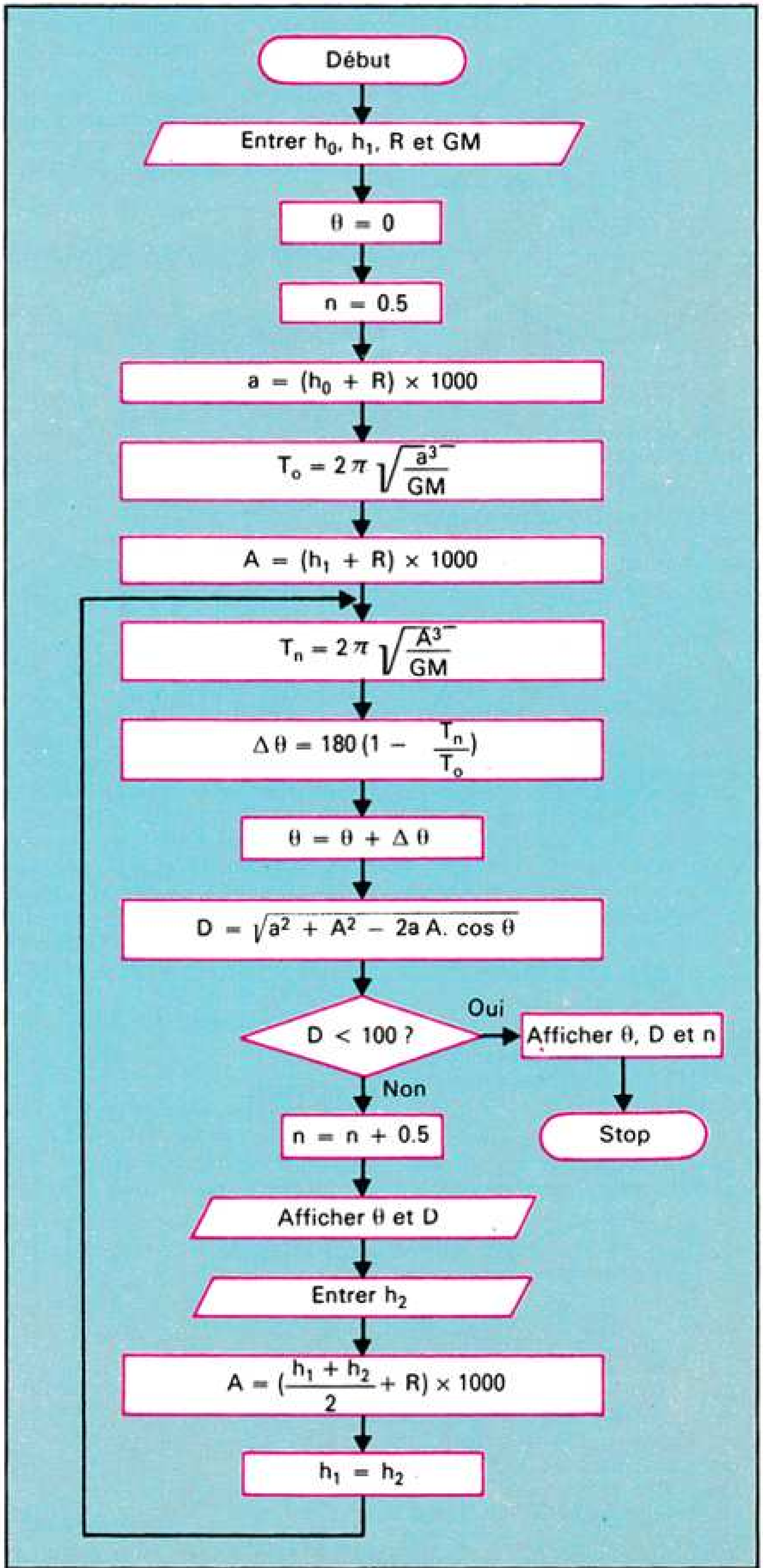
Mode d'emploi

- Entrer αa en x ⇄ t, écrire αb et faire A.
- Entrer δa en x ⇄ t, écrire δb et faire R/S.
- Opérer de la même façon pour xa et xb, puis pour ya et yb. La machine affichera alors la valeur de E.
- Entrer N en B. Rappelons que N ne pourra avoir qu'une des valeurs suivantes : 1, 2, −1, −2. Le chiffre sera égal à 1 si l'astre est à gauche de l'étoile de référence, et à 2 sinon, et il sera affecté du signe « − » si l'astre est au-dessous de l'étoile.
- Entrer αe en x ⇄ t et δe en R/S.
- Faire de même pour x_0 et x puis pour y_0 et y.
- La machine affichera alors αx en heures décimales. Faire ensuite x ⇄ t pour obtenir δx.
- Dans l'application du mois dernier, N valait −1.

Programme pour HP-33

```
01 −
   ABS
   RCL 0
   ×
   RTN
   −

10 x²
   R↓
   −
10 x²
   x ⇄ y
   R↓
   +
   √x
   RTN
   GSB 06
   STO 0
   R/S
   GSB 06
```



Organigramme

```
20 STO ÷ 0
   RCL 0
   R/S
   STO 4
   R↓
   STO 5
   R↓
   STO 3
   ABS
   STO ÷ 3

30 2
   ×
   3
   –
   STO 2
   R/S
   GSB 01
   RCL 3
   ×
   STO + 04

40 R↓
   GSB 01
   RCL 2
   ×
   1
   5
   ÷
   STO-5
   RCL 4

49 RCL 5
```

Mode d'emploi

- Ecrire αa et le multiplier par 15 pour l'avoir en degrés.
- Faire de même avec αb. A présent, αa se trouve dans le registre y et αb dans le registre X.
- Entrer δa, faire ENTER, écrire δb et faire GSB 16.
- Entrer à la suite, en les séparant par des ENTER : xa, xb et ya et yb, puis faire R/S. A ce moment-là, la machine affichera E.
- Entrer le nombre N. Rappelons que ses valeurs possibles sont 1, 2, –1, –2. Le chiffre vaut 1 si l'astre est à gauche de l'étoile de référence, il vaut 2 dans le cas contraire. Il est précédé du signe « – » si l'astre est au-dessous de l'étoile.
- Après avoir tapé N, entrer αe (en heures) en ENTER, puis δe et faire R/S.
- Entrer à la suite, en les séparant par des ENTER, X, X0, Y et Y0, puis taper R/S.
- La machine affichera αx en heures décimales.
- Faire x ⇄ y pour avoir δx.
- Dans l'application du mois dernier, N valait –1.

Pierre KOHLER
Programmation Daniel FERRO □