PROGRAMMEZ VOTRE CONSOMMATION SPATIALE

► Nous vous proposons ce mois, en quelque sorte un complément au programme proposé dans notre précédent numéro concernant les rendez-vous spatiaux. Ce programme, nous l'avions souligné, ne tenait pas compte de la consommation de propergols nécessaires aux changements d'orbite successifs.

Les manœuvres pouvaient donc se poursuivre indéfiniment. Cette fois-ci, nous allons donc calculer cette consommation, compte tenu de la quantité de propergols embarquée, de la masse totale du satellite, de la vitesse d'éjection du mélange utilisé et, bien entendu, des paramètres orbitaux.

La formule de base à utiliser dans ce calcul est celle que Tsiolkovsky, le précurseur soviétique de l'astronautique, proposa dès 1903. Cette formule s'énonce comme suit : la vitesse finale d'une fusée est égale à la vitesse d'éjection des gaz au sortir de la tuyère, multipliée par le logarithme népérien du rapport de masse. Le rapport de masse est égal au quotient de la masse totale de la fusée (à sa mise à feu) par la masse finale (en fin de combustion). Ainsi :

$V = Ve \text{ Log } (Md/Mf)$

Md : masse de départ

Mf : masse finale

On voit alors que la vitesse finale sera égale à la vitesse d'éjection si Log (Md/Mf) = 1, ce qui donne Md/Mf = e, avec e = 2.718 (base des logarithmes népériens). Comme la masse au départ (Md) est égale à la masse de la fusée sèche (charge utile + structure) ajoutée à la masse des propergols embarqués, on aboutit finalement à l'égalité :

$$\text{Masse des propergols} = \text{masse finale x} \left(\frac{e-1}{e}\right)$$

La quantité de propergols par rapport au poids total est ainsi égale à 1.718/2.718, soit 0.632. Autrement dit, la vitesse finale de la fusée est égale à celle de l'éjection de ses gaz si la quantité de propergols embarquée représente 63,2 % de la masse totale. On calcule de même que cette vitesse est du double de la vitesse d'éjection pour un rapport de 86 %, du triple pour 95 %, etc. Mais il y a, bien entendu, une limite à cette séduisante projection, car on ne peut pas alléger indéfiniment la structure d'une fusée.

Inversement, pour obtenir de petites impulsions, de quelques mètres ou quelques dizaines de mètres par seconde, correspondant à des changements d'altitude lors de manœuvres orbitales, le pourcentage de propergols consommés sera très faible par rapport au poids total du satellite. Ainsi, pour ses manœuvres en orbite, la navette spatiale n'emporte que 10 tonnes de propergols environ, pour une masse satellisée qui avoisine 100 tonnes, soit une proportion de l'ordre de 10 % seulement. Même en brûlant tout d'un seul coup, la navette serait donc loin d'atteindre les 2 700 m/s de vitesse d'éjection de ses gaz : il faudrait pour cela, nous l'avons vu, que la proportion atteigne 63 %. C'est pourquoi, depuis son orbite basse initiale, elle ne pourrait guère grimper au-delà de 1 000 km d'altitude.

Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire le calcul de la consommation de propergols nécessitée par un changement d'orbite (et non pas celui de la vitesse finale atteinte à partir d'un certain rapport de masse), nous utiliserons une formule dérivée de celle de Tsiolkovsky, spécialement établie pour le cas présent :

$$Mp = Md\left(1 - \frac{1}{X}\right)$$

Avec :
$X = \text{INV Log } (\Delta V/Ve)$

Mp et Md ont été définis ci-dessus. ΔV est l'incrément ou le décrément de vitesse nécessité par la manœuvre à effectuer.
Ve est la vitesse d'éjection des gaz.

Dans le cas de propergols stockables (péroxyde d'azote + hydrazine), les seuls qui conviennent pour des moteurs-fusées de manœuvre, on a Ve = 2 650 m/s.

Le programme ci-dessous pourrait être incorporé comme sous-programme dans la séquence de calculs du mois dernier (entre les étapes 6 et 7) ; mais ce serait compliquer les choses inutilement, d'autant que bon nombre de calculatrices ne disposeraient plus alors d'un nombre de pas suffisant. Nous proposons donc plutôt de relever les différentes étapes de vos manœuvres spatiales dans un tableau établi comme celui de la page suivante, et d'effectuer le calcul de consommation après coup (signalons que les chiffres indiqués ci-dessous sont ceux que nous utiliserons plus loin dans l'application) :

N (orbites)	Point de départ (h_2)	Point actuel après N orbites (h_0)	Point visé (h_1)	Étape	Masse de propergols restante
0,5	200	200	300	1	8 000
1.	200	300	500	2	6 955
1.5	300	500	2 000	3	5 978
2.	500	–	–	Stop	(– 4 272)

Pour chaque séquence, en fin de calcul, le programme comporte un test destiné à vérifier (dans le cas d'un vaisseau spatial habité) qu'il reste suffisamment de propergols à bord pour regagner la Terre depuis l'altitude où il se trouve. Et cela avant d'entreprendre chaque nouvelle manœuvre.

Formulation

Constantes à entrer :
GM = 3.98647 EE 14 (constante géocentrique de gravitation)
R = 6 378 km (rayon terrestre)
Ve = 2 650 m/s (vitesse d'éjection pour les propergols stockables)
Variables à entrer :
Md = masse du satellite à l'origine (en kg)
Mp = masse des propergols embarqués (en kg)

1. Calcul de la vitesse orbitale "circulaire" à l'altitude actuelle (h_0).

$V_0 = \sqrt{GM/a_0}$

avec $a_0 = (h_0 + R).10^3$ (exprimé en mètres)

2. Vitesse réelle (avant manœuvre) à cette altitude h_0, compte tenu de l'altitude de départ (h_2).

$h_0 = h_2$ au début de la séquence, puisque l'on part d'une orbite circulaire.

$V_r = V_0 \sqrt{r_2/a_1}$

$r_2 = h_2 + R$ (à exprimer en km)

$a_1 = (h_0 + h_2)/2$ (à exprimer en km)

3. Vitesse nécessaire en ce point (h_0) pour atteindre l'altitude visée (h_1).

$V_n = V_0 \sqrt{r_1/a_2}$

$r_1 = h_1 + R$ (en km)

$a_2 = [(h_0 + h_1)/2] + R$

4. Calcul de la différence de vitesse à créer pour atteindre l'altitude requise.

$V = V_n - V_r$

Si $V > 0$, il s'agit d'un incrément.

Si $V < 0$, il s'agit d'un décrément.

Mais le signe importe peu ici car on ne se préoccupe pas du sens de l'impulsion à créer, seulement de son intensité. On utilisera donc la valeur absolue de ΔV.

5. Évaluation de la quantité de propergols nécessaire pour atteindre la vitesse requise.

$Mp = Md\,(1 - \frac{1}{X})$

avec $X = \text{INV Log}\,(\Delta\bar{V}/Ve)$

Notons bien qu'il s'agit d'un logarithme népérien.

6. Évaluation de la réserve et calcul de la nouvelle masse du satellite.

$Mr = M - Mp$

$Md = Md - Mp$

7. Test de possibilité de retour.

Pour regagner la Terre, un satellite doit avoir son périgée à environ 120 km d'altitude, ce qui l'amène à pénétrer dans l'atmosphère dense. Nous poserons donc $r_3 = R + 120 = 6\,498$ km.

A. Calcul de la vitesse en h_1 (apogée de la demi-orbite virtuelle de descente).

$V_1 = V_n\,(r_2/r_1)$

B. Vitesse "circulaire" en h_1.

$V_c = \sqrt{GM/(r_1.10^3)}$

C. Vitesse à réaliser en h_1 pour abaisser le périgée à 120 km.

$V_p = V_c \sqrt{6498/a_r}$

$a_r = R + [(120 + h_1)/2]$

Application

A partir du tableau proposé ci-dessus, calculer les consommations de propergols successives de la navette spatiale. Nous avons :

Md = 95 000 kg

Mp = 8 000 kg

1. Vitesse "circulaire" pour h_0 :

$a_0 = 6.578.10^3$

$V_0 = 7784.4.$ m/s

2. Vitesse réelle en h_0 avant manœuvre :

$a_1 = 6578$

$r_2 = 6578$

$V_r = 7784.4$ m/s

3. Vitesse nécessaire en h_0 pour atteindre l'altitude souhaitée (h_1) :

$a_2 = \left(\frac{200 + 300}{2}\right)\ 6378 + 6628$

$r_1 = 300 + 6378 = 6678$

$V_n = 7784.4 \sqrt{\frac{6678}{6628}} = 7813.7$ m/s

4. Différence de vitesse :

$\Delta\bar{V} = V_n - V_r = 7813.7 - 7784.4 = 29.3$ m/s

5. Quantité de propergols requise :

$X = \text{INV Log}\left(\frac{29.3}{2650}\right)$

$= 1.01112$

$Mp = 95\,000\,(1 - 0.989) = 1045$ kg

6. Réserve :

$Mr = 8000 - 1045 = 6955$

Nouvelle masse totale :
$Md = 95\,000 - 1045 = 93\,955$

7. Test de retour

A. $V_1 = 7813.7 \left(\frac{6578}{6678}\right)$

$= 7696.7$ m/s

B. $V_c = \sqrt{GM/6.67810^3}$
$= 7725.9$ m/s

C. $V_p = 7725.9 \sqrt{6498/6588}$
$= 7725.9 \times 0.993$
$= 7672.9$ m/s

D. $\Delta VR = 7696.7 - 7672.9$
$= 24.0$ m/s

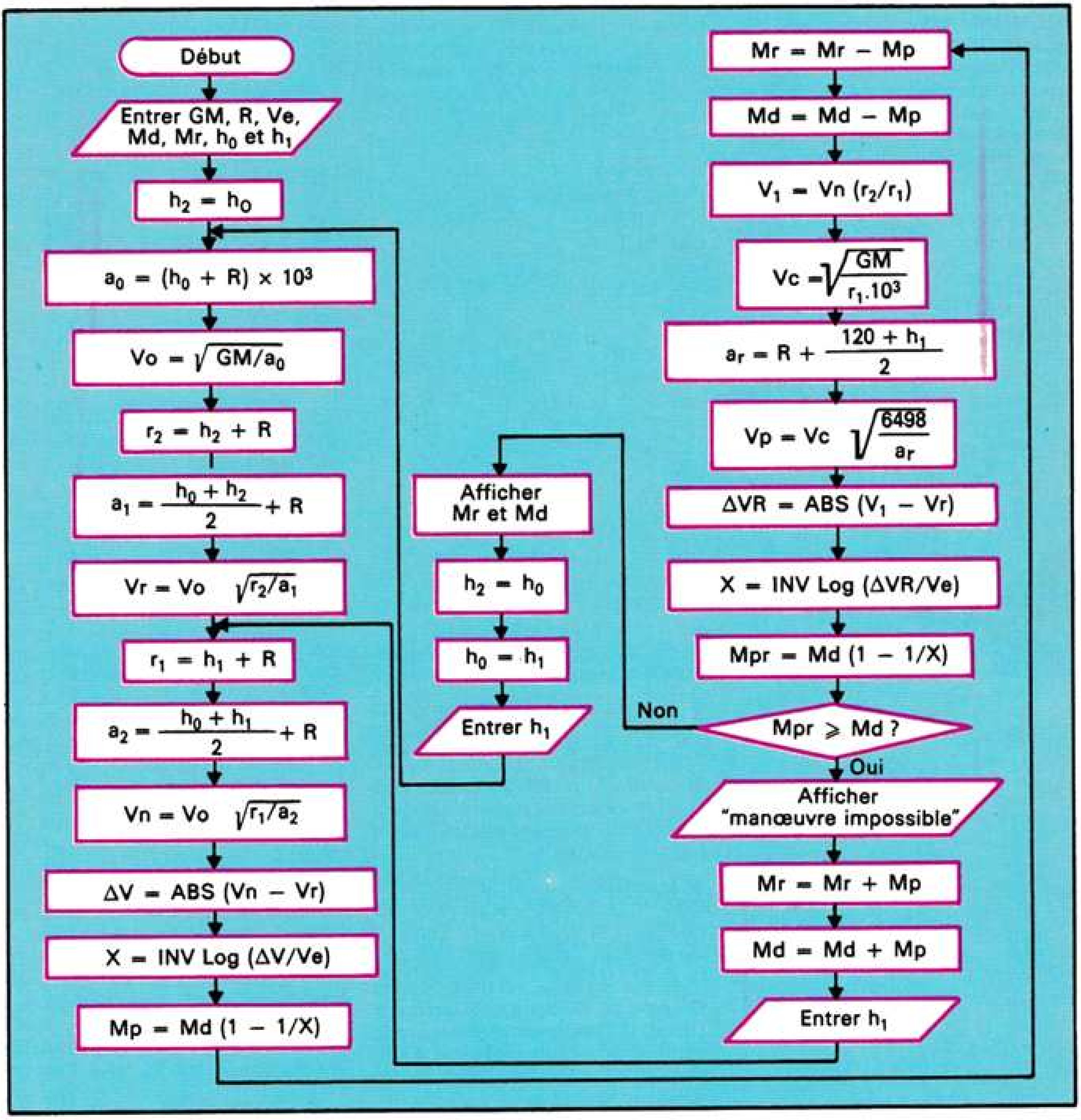
E. $X = 1.0091$

$M_p = 93\,955 \times 0.009016 = 847$ kg

F. 847 < 6955, donc possibilité de poursuivre.

Nous sommes alors à 300 km d'altitude sur une orbite 300/200 km. Nous visons 500 km d'altitude.

1. $V_0 = 7725.9$ m/s



Organigramme

2. Vr. = 7755.0 m/s

3. V_n = 7782.6 m/s

4. ΔV = 27.7 m/s

5. X = 1.0105

M_p = 93 955 × 0.010398
= 977 kg

6. M_r = 6955 − 977 = 5978 kg

M_d = 93955 − 977 = 92 978 kg

7.

A. V_1 = 7556.3 m/s

B. V_c = 7612.7 m/s

C. V_p = 7503.8 m/s

D. ΔVR = 52.5 m/s

E. X = 1.0200

M_p = 1824 kg

F. 1824 < 5978, donc possibilité de poursuivre.

Nous sommes à 500 km sur une orbite 500/300 et visons 2 000 km.

1. V_0 = 7612.7 m/s

2. V_r = 7668.7 m/s

3. V_n = 7978.2 m/s

4. ΔV = 309.5 m/s

5. X = 1.1239

M_p = 10 250 kg

6. M_r = 5978 − 10 250 = − 4272, donc M_r < 0

Inutile de poursuivre. La navette n'a pas assez de propergols à son bord pour effectuer cette manœuvre.

(suite)

SOLUTION DU NUMÉRO PRÉCÉDENT

« Programmez un rendez-vous dans l'espace »

Programme pour HP-34 C

```
001 LBL A
    DEG
    FIX 2
    STO 0
    R↓
    STO 1
    CLx
    STO 3
    .
010 5
    STO 2
    R↓
    R↓
    GSB 0
    STO 6
    GSB 1
    STO 4
    R↓
    STO 7
020 LBL 2
    GSB 0
    STO 5
    GSB 1
    RCL 4
    ÷
    CHS
    1
    +
    1
030 8
    0
    ×
    STO + 3
    RCL 3
    RCL 5
    x²
    RCL 6
    x²
    +
040 RCL 5
    RCL 6
    ×
    RCL 3
    cos
    ×
    2
    ×
    −
    √x
050 EEX
    2
    x > y
    GTO 3
    R↓
    R/S
    RCL 7
    x ⇄ y
    STO 7
    +
060 .
    5
    STO + 2
    ×
    GTO 2
    LBL 3
    CLx
    RCL 2
    RTN
    LBL 0
070 RCL 1
    +
    EEX
    3
    ×
    RTN
    LBL 1
    3
    y^x
    RCL 0
080 ÷
    √x
    2
    ×
    π
    ×
086 RTN
```

Mode d'emploi

- Introduire dans l'ordre, et en les séparant par des ENTER, h_1, h_0, R, puis GM. Appuyez alors sur A.
- La machine affiche la distance D (en mètres). Il faut faire dès lors x ⇄ y pour voir apparaître l'angle θ.
- Introduire la valeur de h_2 en R/S, la machine recalculera les valeurs D et θ, et ainsi de suite. A chaque fois il faudra introduire h_2 en R/S.
- Lorsque D devient inférieur à 100 m, la machine s'arrêtera sur le nombre de coups joués (n). Faire alors R↓ deux fois pour voir D et θ.
- Remarque : R, h_0, h_1 et h_2 doivent être introduits en kilomètres.

Programme pour TI-58, 59

```
000 LBL A
    STO 00
    x ⇄ t
    STO 01
    R/S
    LBL B
010 DEG
    FIX 2
    STO 7
    CLR
    ST0 03
    5
020 STO 02
    x ⇄ t
    A'
    STO 06
    B'
    STO 04
    RCL 07
031 A'
    LBL sin
    STO 05
    B'
    ÷
    RCL 04
040 +/−
    +
    1
    =
    ×
    1
    8
    0
    =
    SUM 03
051 RCL 06
    x²
    +
    RCL 05
    x²
    −
    2
060 ×
    RCL 05
    ×
    RCL 06
    ×
    RCL 03
    cos
070 =
    √x
    x ⇄ t
    1
    0
    x ≥ t
    cos
    RCL 03
080 R/S
    +
    EXC 07
    =
    ×
    .
    5
    SUM 02
090 A'
    GTO sin
    LBL cos
    RCL 03
    R/S
    RCL 02
100 INV SBR
    LBL A'
    +
    RCL 01
    =
    ×
```

```
    3
    INV log
111 =
    INV SBR
    LBL B'
    ×
    x²
    ÷
    RCL 00
120 =
    √x
    ×
    2
    ×
    π
    =
127 INV SBR
```

Mode d'emploi

● Entrer la valeur de R en x = t, taper celle de GM et faire A.

● Entrer h_0 en x = t, puis h_1 et faire B. Apparaîtra alors θ en degrés. Faire x = t pour avoir D (en mètres).

● Entrer la nouvelle valeur h_2 en R/S. La machine calculera les nouvelles valeurs de θ et D, et ainsi de suite. A chaque fois, il faudra continuer en introduisant h_2 en R/S.

● Lorsque D est inférieur à 100 mètres, on obtiendra le nombre "n" d'orbites en faisant R/S.

● Remarque : R, h_0, h_1 et h_2 doivent être introduits en kilomètres.

Exemple d'utilisation

Prenons pour exemple les manœuvres décrites plus haut dans le tableau, en supposant que la cible évolue à 500 km d'altitude :
Au départ, n = 0, D = 300 km et $\theta = 0°$
Ensuite :
n = 0.5, h_1 = 200 km, D = 1398 km et $\theta = 11{,}65°$
n = 1, h_1 = 300 km, D = 2516 km et $\theta = 21{,}37°$
n = 1.5, h_1 = 500 km, D = 2990 km et $\theta = 25{,}28°$
n = 2, h_1 = 2000 km, D = 976 km et $\theta = 4{,}95°$
Certainement, cette façon d'initier la poursuite de la cible n'est guère prometteuse... Nous souhaitons bon courage aux lecteurs, et ne manquerons pas de publier la séquence de manœuvres la plus courte qui nous aura été communiquée.

Pierre KOHLER
Programmation Daniel FERRO □