PERFORMANCES DES FUSÉES POUR DES MISSIONS A GRANDE DISTANCE DE LA TERRE

► Voici un autre cas d'utilisation de la célèbre formule de Tsiolkovsky, à laquelle nous avons fait appel dans notre exercice du mois dernier sur la programmation de la consommation spatiale. En réutilisant par ailleurs les formules présentées voici trois ans dans notre exercice sur les missions à travers le système solaire, nous avons établi le programme ci-dessous. Il permet de calculer la masse de la charge utile susceptible d'être expédiée vers la Lune, les planètes ou simplement une orbite géocentrique de grand apogée, depuis une orbite de parking. Cette orbite, afin d'obtenir les meilleures performances, doit être une orbite dite "basse", c'est-à-dire avoir une altitude comprise entre 150 et 250 km. La masse de la sonde ou du satellite à expédier à grande distance de la Terre se déduit de la masse initiale placée en orbite de parking, compte tenu des caractéristiques de l'étage de fusée utilisé pour ce transfert.

Ce programme a son intérêt pour évaluer les possibilités des lanceurs actuels en matière de transferts géostationnaires, de tirs lunaires ou de missions planétaires. Il présente également un intérêt didactique, car en faisant varier le rendement des étages mis en œuvre (d'après la vitesse d'éjection des propergols utilisés et le rapport de masse), on peut établir l'influence de ce rendement sur la charge utile. Nous suggérons par exemple de déterminer la variation de masse utile d'après le propergol utilisé ou les variations de distance de Mars (qui varient dans un rapport considérable, de 1 à 7).

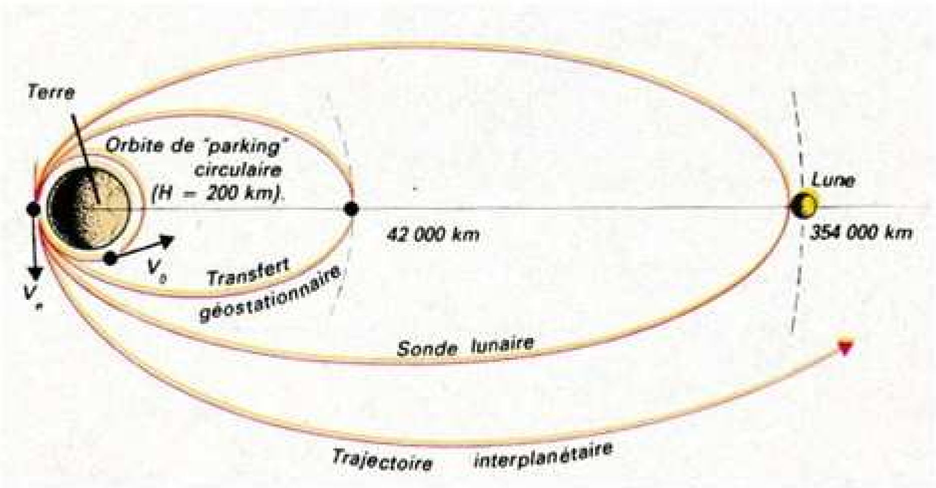
Formulation

Il faut utiliser une clé, suivant que l'on vise un apogée à haute altitude ou la Lune d'une part, une planète ou un point quelconque du système solaire d'autre part. Dans le premier cas, l'on passe directement du point 1 au point 5 b ; dans le second cas, il faut passer par toutes les étapes de calcul données ci-dessous.

1. Détermination de la vitesse de satellisation sur orbite de parking autour de la Terre. Cette orbite est supposée circulaire et devra rester voisine de 200 km. Elle doit correspondre évidemment à l'altitude de satellisation de la masse indiquée en 6.

$$V_o = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

GM = constante géocentrique de gravitation
GM = 3.9861 10^{14}
a = demi grand axe de l'orbite géocentrique
a = R + h
avec :
R = rayon terrestre équatorial (6378 km)
h = altitude moyenne
Attention, "a" est à exprimer en mètres.



2. Calcul de la vitesse résiduelle. C'est celle que doit avoir la sonde au large de la Terre pour atteindre le point visé dans le système solaire (pas forcément une planète).

$$V_r = 29\,786 \left(\sqrt{\frac{2d}{d+1}} - 1 \right)$$

d = distance héliocentrique du point visé (à exprimer en unités astronomiques)
29 786 correspond à la vitesse orbitale moyenne de la Terre autour du Soleil (en m/s) et "d" vaut 5,2, pour Jupiter, par exemple.

3. Calcul de la vitesse d'évasion par rapport à la Terre, depuis l'orbite de parking considérée.

$$V_e = V_o \sqrt{2} = 1.4142\ V_o$$

4. Vitesse d'injection à assurer depuis l'orbite de parking. C'est la combinaison de la vitesse d'évasion et de la vitesse résiduelle. La vitesse d'évasion permet seulement de se placer autour du Soleil à la même distance que la Terre ; pour aller ailleurs dans le système solaire, il est nécessaire de créer un supplément de vitesse. Il doit être dirigé dans le sens du mouvement de révolution si l'on veut se rendre dans le système solaire extérieur ; et dans le sens contraire pour explorer le système intérieur.

$$V_i = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$$

5. Détermination de l'incrément de vitesse à créer par l'étage de fusée associé à la sonde, et qui circule en orbite de parking.

A. Cas d'une sonde spatiale interplanétaire :

$$dV = V_i - V_o$$

B. Cas d'un satellite artificiel terrestre de grand apogée ou d'une sonde lunaire :

$$dV = V_o \left[\sqrt{(D/A)} - 1\right]$$

D = distance géocentrique du point visé
A = demi grand axe de la nouvelle orbite. A = (a + D)/2
(a est défini en 1)
D = 384 400 km pour la Lune en moyenne
D = 42 164 km pour l'orbite géostationnaire

6. Calcul de la masse de charge utile. C'est le poids du satellite ou de la sonde susceptible d'être expédié vers l'orbite envisagée, d'après les performances de l'étage de fusée placé en orbite de parking. A ce niveau on définit trois valeurs, qui sont à entrer dans le programme comme variables :

V : vitesse d'éjection des gaz pour les propergols utilisés. En orbite de parking, les étages utilisés sont de trois types : à poudre, à propergols

Dessin I. Delplanque

stockables ou cryogéniques (oxygène et hydrogène liquides). Vitesses d'éjection respectives : 2 550, 2 650 et 4 350 m/s environ.
R : rapport de masse correspondant au rapport du poids de propergol embarqué sur le poids de la structure "sèche" de la fusée. Pour les étages supérieurs de fusées, la part des propergols est généralement comprise entre 85 et 90% du poids total de l'étage, hors charge utile. Plus précisément, pour les trois types de propergols énumérés ci-dessus, cela donne R = 9,1 / 7,2 / 6,6. On remarquera que pour les propergols cryogéniques le rapport est défavorable : cela tient à la faible densité de l'hydrogène, qui pénalise le poids de la structure ; mais il est compensé par une plus grande vitesse d'éjection.
M : masse satellisable en orbite basse (exprimée en kg). Cette masse est en fait le point de départ de calcul ; elle correspond à l'étage de fusée placé en orbite de parking, avec sa charge utile. Le tableau ci-dessous donne les masses satellisables (charge utile) en orbite basse par quelques lanceurs actuels.

FUSÉE	PAYS	CHARGE UTILE EN ORBITE BASSE (kg)
Scout	USA	200
Atlas-Centaur	USA	5 200
Delta	USA	1 900
Titan III-E	USA	17 000
Navette	USA	29 500
A-2 (Soyouz)	URSS	7 500
D-1 (Saliout)	URSS	21 000
Ariane 1	ESA (Europe)	4 500
N-1	Japon	1 200
FB-1	Chine	3 500

$$CU = \frac{M}{X}\left(1 - \frac{1}{Y}\right)$$

La valeur de X est dérivée de la formule de Tsiolkovsky où :
$dV = V.\ \mathrm{Log}\ (m_I/m_O)$
avec :
m_I = masse initiale
m_O = masse en fin de combustion
Ici, X = INV Log (dV/V)
Attention, il s'agit du logarithme népérien et non décimal.
Y = (1 + R)/X
R est fixé par l'utilisateur, comme indiqué ci-dessus.

Applications

1. Quelle charge pourra-t-on expédier vers la Lune avec la fusée Ariane V (qui sera mise en service en 1990). La charge satellisable en orbite basse sera de l'ordre de 12 tonnes ; les étages cryogéniques français (H-8) ont un rapport de masse de R = 7.1, avec une vitesse d'éjection de V = 4 340 m/s.
Nous considérerons que la Lune est à son périgée (365 000 km).

Clé 1

1. Vitesse circulaire à 185 km (orbite basse type).

$$V_o = \sqrt{\frac{GM}{a}} = \sqrt{\frac{3.9861\ 10^{14}}{6.563\ 10^6}}$$

car
$a = 6378 + 185 = 6\ 563$ km
$= 6.563\ 10^6$ m
$V_o = 7\ 793$ m/s

5B. Incrément de vitesse à créer.

$$dV = V_o\left(\sqrt{D/A} - 1\right)$$

D = 365 000
A = (6 563 + 365 000)/2
= 185 781.5

$$dV = 7\ 793\ \sqrt{1.965 - 1}$$
$= 3130$ m/s

6. Calcul de la charge utile.

$$X = \mathrm{INV\ Log}\ \frac{3\ 130}{4\ 340}$$
$$= \mathrm{INV\ Log}\ .7212 = 2.057$$

$$CU = \frac{M}{X}\left(1 - \frac{1}{Y}\right)$$

$Y = (1 + 7.1)/2.057$
$= 3.938$

$$CU = \frac{12\ 000}{2.057}\left(1 - \frac{1}{3.938}\right)$$
$= 4\ 352$ kg

A noter que l'étage propulseur pèsera donc 12 000 – 4 352 = 7 648 kg. C'est assez proche des 9 300 kg de l'actuel 3e étage H-8 d'Ariane 1. Celui-ci, utilisé comme quatrième étage sur Ariane V, permettrait ainsi d'expédier environ 4 tonnes vers la Lune.

2. Charge utile d'une sonde expédiée vers Mars au périhélie (1,38 UA) depuis la soute de la navette spatiale. La charge satellisable par la navette est M = 29500 kg. L'étage cryogénique Centaur, qui sera justement adapté à la soute de la navette présente les caractéristiques suivantes :
R = 6.1 et V = 4 360 m/s.

Clé 2

1. Vitesse circulaire à 185 km : 7 793 m/s, comme ci-dessus.

2. Vitesse résiduelle

(d = 1.38)

$$V_r = 29\ 786\left(\sqrt{\frac{2d}{d+1}} - 1\right)$$

$$V_r = 29\ 786\left(\sqrt{\frac{2.76}{2.38}} - 1\right)$$

$= 2\ 290$ m/s

3. Vitesse d'évasion

$$V_e = V_o\sqrt{2} = 7\ 793.3$$
$\times\ 1.4142 = 11\ 021$ m/s

4. Vitesse d'injection

$$V_i = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$$
$$= \sqrt{11\ 021^2 + 2\ 290^2}$$
$= 11\ 256$ m/s

5. Incrément de vitesse

$dV = V_i - V_o = 11\ 256$
$- 7793 = 3\ 463$ m/s

6. Calcul de la charge utile

R = 6.1
X = INV Log (dV/V)

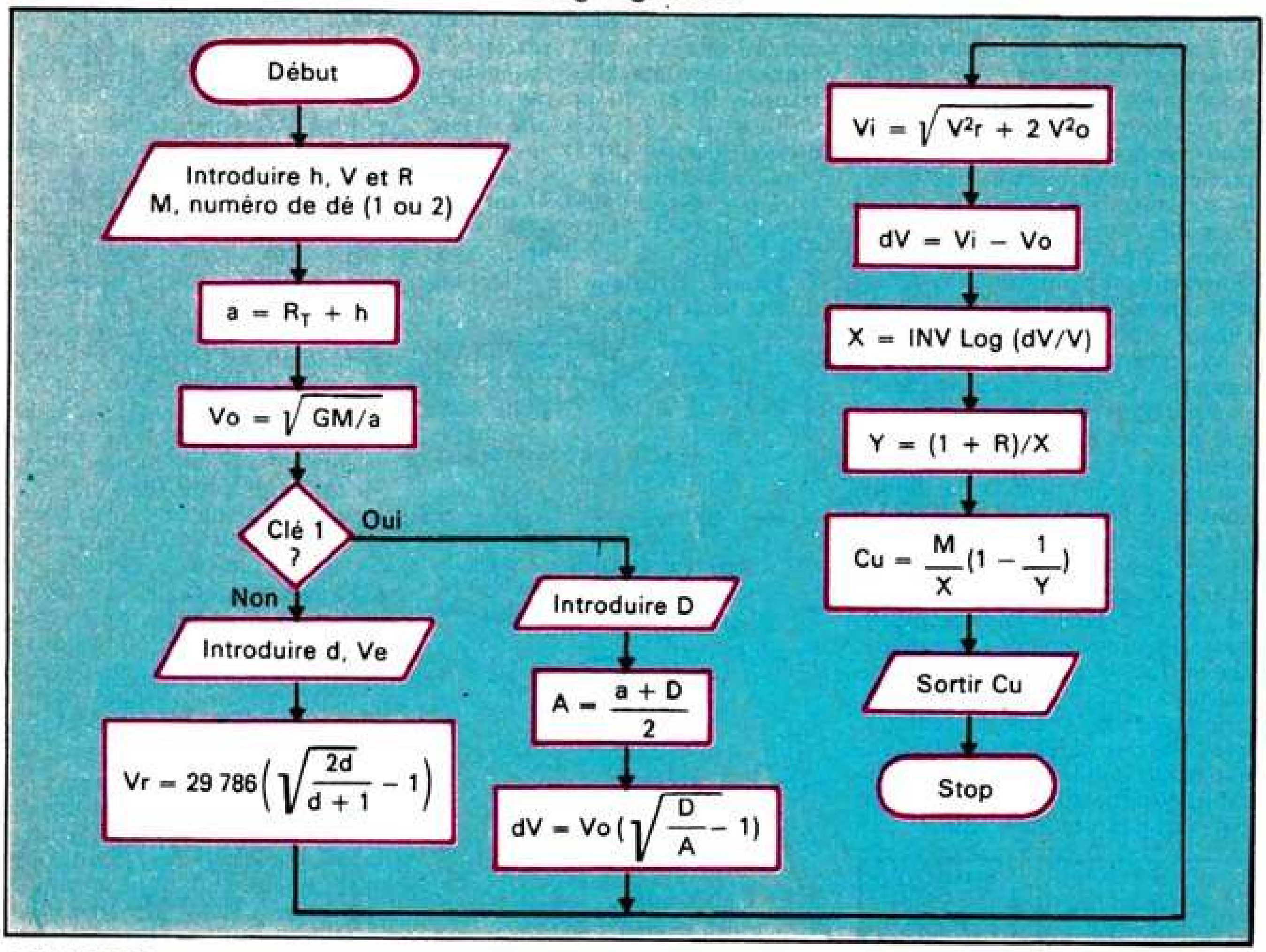
$$= \mathrm{INV\ Log}\left(\frac{3463}{4360}\right)$$

= INV Log .794
= 2.213
Y = (1 + R)/X = 7.1/2.213
= 3.209

$$CU = \frac{M}{X}\left(1 - \frac{1}{Y}\right)$$
$$= \frac{29\ 500}{2.213}\left(1 - \frac{1}{3.209}\right)$$
$= 9\ 176$ kg

Le poids de la fusée seule devra donc être de 29 500 – 9 176 = 20,3 tonnes, ce qui est à peine supérieur aux 16,3 t de l'étage Centaur-D actuel, qui sera justement "gonflé" pour être adapté à la soute de la navette. On remarquera aussi que la masse d'une charge envoyée vers la Lune ou une planète proche correspond à environ 1/3 de celle placée en orbite basse, si l'on fait appel à un étage cryogénique.

Organigramme



SOLUTION
DU NUMÉRO PRÉCÉDENT
« Programmez votre consommation spatiale »
Programme pour TI-58, 59

```
000 LBL A'
    +
    x ⇌ t
    =
    ÷
    2
    +
    RCL 01
010 =
    INV SBR
    LBL B'
    -
    RCL 08
    =
    |x|
    ÷
020 RCL 02
    =
    INV lnx
    1/x
    +/-
    +
    1
    =
030 ×
    RCL 03
    =
    INV SBR
    LBL A
    STO 01
    x ⇌ t
040 STO 00
    R/S
    LBL B
    STO 02
    R/S
    LBL C
050 STO 04
    x ⇌ t
    STO 03
    R/S
    LBL D
    STO 06
060 x ⇌ t
    STO 05
    STO 07
    R/S
    LBL E
    RCL 05
070 +
    RCL 01
    =
    ×
    3
    INV log
    =
    1/x
080 ×
    RCL 00
    =
    √x
    STO 09
    STO 08
    RCL 05
091 x ⇌ t
    RCL 07
    A'
    x ⇌ t
    RCL 07
    +
    RCL 01
101 =
    STO 10
    ÷
    x ⇌ t
    =
    √x
    PRD 08
110 RCL 06
    LBL cos
    x ⇌ t
    RCL 05
    A'
    x ⇌ t
    RCL 06
121 +
    RCL 01
    =
    STO 11
    ÷
    x ⇌ t
    =
130 √x
    ×
    RCL 09
    =
    STO 12
    B'
    STO 13
140 INV SUM 03
    INV SUM 04
    RCL 06
    x ⇌ t
    1
150 2
    0
    A'
    1/x
    ×
    RCL 00
    ×
    6
    .
160 4
    9
    8
    ÷
    RCL 11
    =
    √x
    Exc 08
170 STO 14
    RCL 12
    ×
    RCL 10
    ÷
    RCL 04
180 x ⇌ t
    RCL 11
    B'
    x ≥ t
    sin
    RCL 06
    Exc 05
190 STO 07
    RCL 04
    R/S
    STO 06
    GTO E
    LBL sin
201 RCL 13
    SUM 03
    SUM 04
    RCL 14
    STO 08
211 CLR
    1/x
    R/S
    STO 06
    CE
217 GTO cos
```

Mode d'emploi

- Entrer GM en x = t, puis le rayon R de la planète en x = t et appuyer sur A (R en km).
- Introduire la vitesse d'éjection Ve en B (exprimée en m/s).
- Taper Md, masse du satellite à l'origine (en kg), faire x = t, puis écrire Mr, masse des propergols embarqués, et faire C.
- Entrer de même h_0 et h_1 (en km) en D.
- Appuyer sur E pour démarrer le calcul. Apparaitra alors la masse Mr restante.
- Introduire la nouvelle valeur de h_1 et continuer en tapant sur R/S. Ce point peut être répété à souhait.
- Si la machine s'arrête sur une série de "9" clignotants, c'est que le retour du Terre est impossible. Il faut alors réintroduire une nouvelle valeur de h_1, puis faire R/S.
- Pour un nouveau calcul, modifier la valeur ou le couple de valeurs nécessaires, puis faire E. Attention : Md et Mr ne sont pas conservés.

Programme pour HP-34 C

```
LBL A
STO 2
R↓
STO 1
R↓
STO 0
R/S
LBL B
STO 4
R↓
STO 3
R↓
STO 6
R↓
STO 7
STO 5
LBL 4
RCL 1
+
EEX
3
×
1/x
RCL 0
×
√x
STO 8
STO 9
RCL 7
RCL 1
+
STO.0
RCL 5
RCL 7
GSB 0
÷
√x
STO × 8
RCL 6
LBL 3
RCL 1
+
ENTER
ENTER
RCL 5
RCL 6
GSB 0
÷
√x
RCL 9
×
ENTER
ENTER
RCL 8
GSB 1
STO 1
STO - 3
STO - 4
R↓
x = y
÷
RCL.0
×
RCL 6
1
2
0
GSB 0
1/x
6
.
4
9
8
×
RCL 0
x
R↑
÷
√x
GSB 1
RCL 4
x ≤ y
GTO 2
RCL 5
STO 7
RCL 6
STO 5
RCL 4
R/S
STO 6
RCL 5
GTO 4
LBL 2
RCL 1
STO + 3
STO + 4
CLx
1/x
1/x
STO 6
GTO 3
LBL 0
+
2
÷
RCL 1
+
RTN
LBL 1
-
ABS
RCL 2
÷
eˣ
1/x
CHS
1
+
RCL 3
×
RTN
```

Mode d'emploi

- Introduire successivement, en les séparant par des ENTER : GM, R (en km), et la vitesse d'éjection Ve en m/s ; faire A ensuite.
- Faire de même avec h_0, h_1, Md et Mr, ces quatre valeurs étant à entrer en B. Apparaitra alors Mr, masse restante de propergols.
- Introduire la nouvelle valeur de h_1 et continuer en appuyant sur R/S. Ce point peut-être répété à souhait.
- Si la machine s'arrête sur le message "Error 0", c'est que le retour sur Terre est impossible. Il faut alors réintroduire une nouvelle valeur de h_1, puis faire R/S.

À PROPOS DU RENDEZ-VOUS SPATIAL

Monsieur Daniel Saada, de Rambouillet, est le premier à nous avoir fourni la solution la plus rapide pour atteindre la cible de notre programme-jeu du mois de mars 1983 (*S & V* n° 786). Toutes nos félicitations pour sa perspicacité.
Deux changements d'orbite suffisent pour arriver à D = θ = 0.
h_2 = 886,035 km.
h_3 = 500 km.
Monsieur Saada, ainsi que quelques autres lecteurs, nous signale par ailleurs une erreur de transcription qui s'est glissée dans l'une des formules. Au paragraphe 9 :

$$D = \sqrt{a^2 + A^2 - 2aA\cos\theta}$$

Et A n'est pas celui calculé au paragraphe 6.
En fait, cette variable A prend trois valeurs différentes dans le cours du calcul :

- Paragraphe 4 : $A = (h_1 + R)\,10^3$.
- Paragraphe 6 : $A = (((h_1 + h_2)/2) + R)\,10^3$.
- Paragraphe 9 : $A = (h_2 + R)\,10^3$.

ERRATA

- *Dans notre calculette de Science & Vie n° 787 relative à la consommation spatiale, une omission a fait que les points D, E et F du calcul n° 7 de la formulation (test de possibilité de retour) ne figuraient pas. Pour mener à bien vos estimations, il vous faudra donc réinsérer les données ci-dessous à l'endroit indiqué :*

D. *Différence de vitesse à créer :*
$\Delta Vr = V1 - Vp$

E. *Masse de propergols nécessaire pour le retour :*

$$Mp = Md\left(1 - \frac{1}{X}\right)$$

avec, comme précédemment :
$x = INV\ Log\ (\Delta VR/V^e)$

F. *Test :*
Si Mp ≥ Mr, la manœuvre envisagée n'est pas possible. Il faut alors regagner la Terre, ou effectuer un changement d'orbite moins important, et moins coûteux en énergie. Sinon, retour en 1.

- *De même, dans le tableau donnant les étapes de vos manœuvres spatiales, dans la colonne concernant la masse restante de propergols (en kilogrammes) il fallait lire sur la troisième ligne le chiffre 3955, et non 5978.*

- *Par ailleurs, dans notre rubrique du mois de février (S & V n° 785) nous avons omis de signaler que le programme de calcul des coordonnées d'un astre s'applique seulement à la bande du ciel proche de l'équateur céleste. Pour des déclinaisons supérieures à 30° apparaissent donc des distorsions. Nous envisageons de proposer ultérieurement un programme permettant de couvrir toutes les latitudes célestes.*
Nous prions nos lecteurs de bien vouloir nous pardonner cette regrettable erreur.

Pierre KOHLER
Programmation Daniel FERRO □