COMMENT DÉTERMINER LA DISTANCE DE L'HORIZON

▶ Tous les écoliers apprennent en classe que l'une des preuves de la rotondité de la Terre est fournie par l'observation des bateaux en mer.

Du fait de cette rotondité, lorsqu'ils reviennent vers la côte, on aperçoit d'abord le sommet du mât des navires, puis, ensuite seulement, le pont et la coque. De même, à mesure qu'un observateur s'élève au-dessus du niveau de la mer, la distance de l'horizon recule. Il est donc intéressant de pouvoir calculer cette distance, en fonction de l'altitude à laquelle se trouve l'observateur, que l'on soit sur une plage, en haut d'un monument public ou au sommet d'une montagne. La formule reste évidemment applicable si l'observateur se trouve à bord d'un avion, voire d'un vaisseau spatial en orbite autour de la Terre. Dans ce dernier cas, le calcul fournira le rayon du cercle de vision découpé à la surface de la Terre.

Une seconde application que nous proposons ce mois-ci concerne les autres planètes et leurs satellites. Il est intéressant, par exemple, de savoir à quelle distance porte le "regard" de la caméra d'une sonde spatiale posée sur la Lune, Mars ou Vénus. A hauteur égale au-dessus du sol, on constatera que l'horizon est plus proche sur la Lune (en raison du plus faible rayon de l'astre) que sur la Terre : à un tel point qu'un astronaute placé au centre d'un cirque lunaire de plus d'une dizaine de kilomètre (ce qui n'est pas considérable) aura l'impression de se trouver au milieu d'une vaste plaine. Pour un tout petit astre (un astéroïde par exemple) le résultat est encore plus étonnant. Prenons le cas de Phobos, l'un des deux satellites de Mars, dont le diamètre moyen est de 27 km : Pour un astronaute marchant à sa surface, l'horizon se situerait seulement... à 200 mètres !

Appliquée à un satellite terrestre géostationnaire, la formule de calcul détaillée ci-dessous vous permettra de constater que, depuis ce point fixe au-dessus de notre planète, les satellites découvrent tout dans un cercle de visibilité de 18 100 km de diamètre le long de l'équateur, et 18 080 km le long du méridien, compte tenu du fait que le diamètre polaire est légèrement plus faible que le diamètre équatorial.

A vous, lecteurs, de trouver d'autres exemples de calculs intéressants, en vous aidant du **tableau** ci-contre.

(Suggestions de calcul : Distance de l'horizon lunaire pour les astronautes d'Apollo, lorsqu'ils se trouvaient à bord du module lunaire. Hauteur du hublot : 5 mètres. Ou encore : distance de l'horizon vu depuis le hublot du concorde, à 17 000 mètres d'altitude)

Formulation

Le principe du calcul de la distance d'un horizon en fonction de la hauteur de l'observateur est très simple. La formule à utiliser fait appel à la célèbre relation du théorème de Pythagore ("dans un triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit"), et à une relation trigonométrique (calcul d'un angle à partir de sa tangente).

Il s'agit de déterminer la valeur de la distance, "d", de façon à pouvoir calculer ensuite, "α" angle géocentrique observateur-point horizon. C'est lui qui fournira la distance entre le point sub-observateur (verticale du lieu) et l'horizon.

1. Nous poserons donc :

$d^2 = (R + h)^2 - R^2$

$d^2 = R^2 + 2Rh + h^2 - R^2$

$= h\,(2R + h)$

$d = \sqrt{h\,(2R + h)}$

2. Par ailleurs :

$d = R \operatorname{tg} \alpha$, d'où :

$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\dfrac{d}{R}\right)$

d ayant été calculé en (1)

3. Ce qui donne finalement, pour la distance observateur-horizon, comptée à la surface de l'astre :

$D = 2\pi R \dfrac{\alpha}{360}$

Applications

I. Distance de l'horizon pour un adulte situé sur une plage, à la limite du ressac (altitude : 0 m ; hauteur du regard : 1,5 m)

$R = 6\,371$ km $\quad h = 0.0015$ km

1. $d = \sqrt{0.0015\,[(2 \times 6\,371) + 0.0015]}$

$= \sqrt{19.113} = 4.372$ km

2. $\alpha = \operatorname{arctg} \left(\dfrac{4.372}{6.371}\right)$

$= \operatorname{arctg}(0.000686) = 0.0393°$

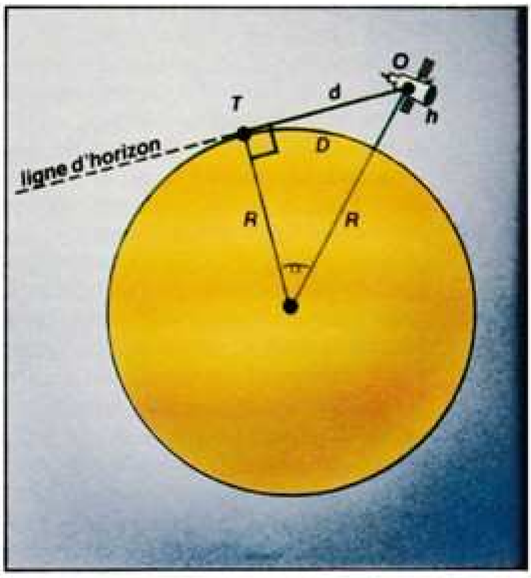
3. $D = 2\pi \times 6371 \times \dfrac{0.0393}{360}$

$= 4.372$ km

Au bord de la mer, pour une personne debout au ras des vagues, l'horizon se trouve donc à environ 4 km. On remarquera, dans le cas de faibles distances, que d = D (puisque l'on a pratiquement une ligne droite au sol)

II. Distance de l'horizon sur les clichés des sondes Viking posées sur Mars. Hauteur de la caméra : 1 m 20. $R = 3\,395$ km, $h = 0.0012$ km

1. $d = \sqrt{8.148} = 2.854$



OT d, distance de l'observateur au point de tangence (horizon)

TC R, rayon moyen de l'astre (voir tableau)

h, hauteur de l'observateur au-dessus du rayon moyen

On a donc $OC^2 = OT^2 + TC^2$

$(R + h)^2 = d^2 + R^2$

2. $\alpha = \operatorname{arctg}(0.000841) = 0.0482°$

3. D = 2.853 km (soit un peu moins de 3 km)

III. Rayon de visibilité pour des astronautes à bord de la navette spatiale ou d'une station orbitale Saliout, à 250 km d'altitude ?

$R = 6\,371$ km, $h = 250$ km

1. $d = \sqrt{250\,[(2 \times 6\,371) + 250]}$

$= \sqrt{3.248.10^6} = 1\,802.2$ km

2. $\alpha = \operatorname{arctg} \left(\dfrac{1\,802}{6\,371}\right)$

$= \operatorname{arctg}(0.2829) = 15.8°$

3. $D = 2 \times \pi \times 6\,371 \times \dfrac{15.8}{360}$

$= 1\,756.3$ km

On remarquera que, pour les distances d'horizon relativement grandes, D est un peu inférieur à d, du fait de la courbure

RAYONS DE QUELQUES ASTRES DU SYSTÈME SOLAIRE

TERRE	6 371 km
LUNE	1 738 km
MERCURE	2 434 km
VÉNUS	6 051 km
MARS	3 395 km
CÉRÈS	525 km
IO	1 825 km
EUROPE	1 560 km
GANYMÈDE	2 640 km
CALLISTO	2 420 km
TITAN	2 560 km

Dessin L. Delplanque

de la Terre. Dans le cas d'une orbite à 250 km d'altitude, au passage à la verticale de Paris, l'horizon se trouve au niveau de Stockholm vers le Nord, de Rabat vers le Sud.

SOLUTION
DU NUMÉRO PRÉCÉDENT

« Mesure précise de la distance, de la vitesse et de la position des planètes sur leur orbite. »

Programme pour HP-33

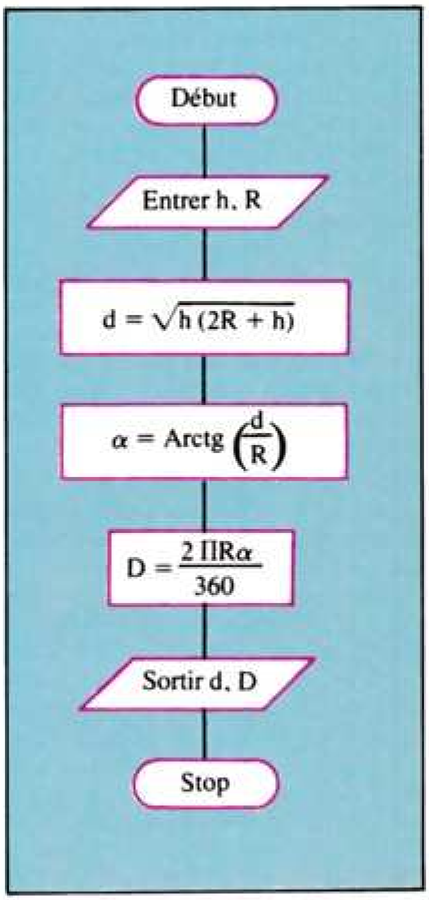
```
01 RCL 0             RCL 5
   ×                 ×
   STO 4             —
   ENTER             STO 4
   sin               ÷
   RCL 5          30 cos⁻¹
   ×                 RCL 6
   RCL 4             RCL 2
   +                 ×
10 STO 7             1/x
   —                 Last x
   ABS               RCL 4
   RCL 1             ×
   x > y             STO 4
   GTO 18            1/x
   RCL 7          40 2
   GTO 04            ×
   RCL 7             x⇄y
   cos               —
20 RCL 5             RCL 3
   —                 ×
   1                 √x
   RCL 7             RCL 4
   cos            48 RTN
```

Mode d'emploi

- Entrer les constantes suivantes : 0.9863 en STO 0
0.001 en STO 1
149.598 EEX 6 en STO 2
1.3271 EEX 17 en STO 3
- Introduire les données : "e" en STO 5, "a" en STO 6. Se placer en degrés.
- Taper t-to et faire GSB 01 : après quelques secondes de calcul apparaîtra "r". Faire R↓ deux fois pour obtenir V puis v.
- Les valeurs de "a" et de "e" ne sont pas altérées en cours d'exécution.
- La valeur entrée en STO 1 peut être modifiée à volonté, suivant la précision désirée dans la recherche de la racine.

Programme pour TI-58, 59

```
000 LBL A'       060 PGM 08       121 +
    (                A                x⇄t
    CE               RCL 09           O
    —                +                =
    sin              RCL 11           1/x
    ×                =                ×
    RCL 11           PGM 08           2
    —            071 B                —
010 RCL 09           5                RCL 03
    )                +/-          131 1/x
    RTN              INV log          =
    LBL A            PGM 08           ×
    STO 00           D                1
    R/S              PGM 08           .
    LBL B        081 E                3
021 STO 10           cos              2
    R/S              —                7
    LBL C            RCL 11           1
    STO 11           ÷            140 EE
    R/S              (                1
    LBL D            1                7
031 DEG              —                =
    RCL 00       090 RCL 11           √x
    PGM 20           ×                INV EE
    A                RCL 06       147 R/S
    RCL 04           cos
    —                )
040 7                STO 01
    2                =
    4            100 INV cos
    2                STO 02
    7                RCL 10
    7                ×
    =                1
    ×                4
    .                9
    9            110 5
050 8                9
    6                8
    3                EE
    =                3
    STO 09           =
    —                STO 03
    RCL 11           ×
    =                RCL 01
```



Mode d'emploi

- Entrer la date sous la forme MMJJ.AAAA en A';
- Entrer le paramètre "a" en B ;
- Entrer l'excentricité "e" en C ;
- Démarrer le calcul en D ;
- La vitesse, V, apparaît. Faire x ⇄ t pour obtenir le rayon r, et RCL 02 pour avoir l'anomalie "v".
- Les données introduites restent en mémoire.
- Ce programme utilise le sous-programme ML 08 de recherche de racines, avec une précision demandée de 10^{-5}, entre M-e et M+e.

Pierre KOHLER
programmation Daniel FERRO □

LES PROGRAMMES CONTINUENT LES CALCULETTES CHANGENT

*Au fur et à mesure que le temps passe, le matériel évolue. Aussi avons-nous décidé, à partir du mois prochain (numéro daté de janvier), d'utiliser de nouvelles calculatrices, c'est ainsi que nous publierons les programmes pour : la **HP-11C de Helwett-Packard** qui travaille en notation polonaise inversée ; et le **PC-1212 de Sharp**, programmable en Basic. On peut les trouver, respectivement, dans le commerce pour environ 800 et 1 000 F. Que les amateurs de Texas Instruments nous excusent, mais d'une part il devenait impératif de présenter une machine travaillant en Basic, d'autre part nous ne pouvons pas publier trois programmes à chaque fois. Le choix "Texas" ou "HP" nous a été dicté pour des raisons purement techniques, en fonction du matériel disponible aujourd'hui.*