Eduard Meisnitzer und Johann Weilharter

Lösung von Aufgaben der linearen Optimierung (Simplexmethode)

1 Vorbetrachtungen

Besonders in der Wirtschaft gibt es sehr viele Anwendungsmöglichkeiten für die sogenannte lineare Optimierung. Das mathematische Modell einer Aufgabe aus der linearen Optimierung kann stets auf die folgende Form gebracht werden:

1. *Nichtnegativitätsbedingungen:*

   $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$

2. *Einschränkende Nebenbedingungen:*

   $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$

   $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2$

   ....

   $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m$

3. *Zielfunktion:*

   $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = z \to \text{Max}$

Das ist die sogenannte Normalform der Maximumsaufgabe der linearen Optimierung. Ergänzend dazu einige Bemerkungen:

- $z \to \max$ sagt nur, daß z auf ein Maximum untersucht werden soll!
- $\geqslant$ Zeichen in den einschränkenden Bedingungen können durch Multiplikation der entsprechenden Ungleichung mit -1 umgedreht werden.
- $=$ Zeichen können durch gleichzeitiges Verlangen von $\leqslant$ und $\geqslant$ umgangen werden.

Die große Bedeutung von Aufgaben aus der linearen Optimierung hat dieses Teilgebiet der Unternehmensforschung vielfach Eingang in die Lehrpläne der höheren Schulen finden lassen. Obwohl sich die verwendeten Rechenoperationen in den Grundrechenarten erschöpfen, erfordert der Simplexalgorithmus (das Hauptrechenverfahren der linearen Optimierung) schon bei einfacheren Problemen mitunter enormen Rechenaufwand.

Das führt in der Unterrichtspraxis häufig zur Beschränkung auf die in Hinblick auf die Praxis unbefriedigenden graphischen Verfahren. Für den programmierbaren TI-59 konnten wir ein Programm entwickeln, welches für die Unterrichtspraxis (und auch für einfachste Probleme des Praktikers) ausreichend sein dürfte. Probleme mit bis zu 8 Variablen können behandelt werden!

2 Aufarbeitung eines praktischen Beispiels mit Hilfe des Programms (1. Teil)

Es muß

a) die gestellte Aufgabe in die Normalform einer Maximumsaufgabe übergeführt werden,

b) das sogenannte Ausgangstableau gebildet werden:

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\
u_1 & a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\
u_2 & a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} & b_2 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
u_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} & b_m \\
 & -c_1 & -c_2 & \dots -c_n & 0
\end{array}
$$

Dabei ist zu beachten, daß die Koeffizienten der Zielfunktion negativ anzusetzen sind.

$u_1, \dots, u_m$ sind die sogenannten Schlupfvariablen.

Gegeben ist folgende Aufgabe:

1. $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \dots, x_6 \geqslant 0$
2. $2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + 4x_6 \leqslant 20$
   $4x_1 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leqslant 4$
   $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 \leqslant 6$
   $2x_1 + x_2 + x_4 + 4x_5 + x_6 \leqslant 8$
3. $6x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 8x_6 = z \rightarrow \text{Max}$

Nun muß das Programm eingegeben werden!

3 Eingabe des Programms und Aufzeichnung auf Magnetkarte

Bei der erstmaligen Eingabe der Befehle sollte man wie folgt vorgehen:

a) Speicherbereichsverteilung 239.89 (9 OP 17) einstellen,

b) Programmbefehle gemäß LISTING eintippen,

c) Programm auf Block 1 einer Magnetkarte aufzeichnen (1 write).

d) Späteres Einlesen der Karte:
9 OP 17 CLR Einlesen ... in der Anzeige erscheint 1.

Programmlisting:

000	76	LBL	021	76	LBL	042	09	9
001	11	A	022	15	E	043	95	=
002	42	STO	023	71	SBR	044	42	STO
003	06	06	024	24	CE	045	00	00
004	32	X:T	025	73	RC*	046	92	RTN
005	42	STO	026	00	00	047	76	LBL
006	07	07	027	91	R/S	048	19	D'
007	91	R/S	028	69	OP	049	42	STO
008	76	LBL	029	20	20	050	04	04
009	12	B	030	61	GTO	051	85	+
010	71	SBR	031	00	00	052	08	8
011	24	CE	032	25	25	053	95	=
012	25	CLR	033	76	LBL	054	42	STO
013	91	R/S	034	24	CE	055	00	00
014	72	ST*	035	75	-	056	32	X:T
015	00	00	036	01	1	057	68	NOP
016	69	OP	037	54	)	058	75	-
017	20	20	038	65	×	059	01	1
018	61	GTO	039	43	RCL	060	54	)
019	00	00	040	06	06	061	65	×
020	13	13	041	85	+	062	43	RCL

063	06	06	122	01	01	181	08	08
064	95	=	123	09	9	182	32	X:T
065	44	SUM	124	42	STO	183	43	RCL
066	00	00	125	00	00	184	01	01
067	73	RC*	126	43	RCL	185	67	EQ
068	00	00	127	07	07	186	01	01
069	35	1/X	128	42	STO	187	93	93
070	72	ST*	129	05	05	188	73	RC*
071	00	00	130	43	RCL	189	08	08
072	43	RCL	131	06	06	190	94	+/-
073	00	00	132	42	STO	191	64	PD*
074	32	X:T	133	03	03	192	01	01
075	43	RCL	134	43	RCL	193	69	OP
076	07	07	135	00	00	194	21	21
077	42	STO	136	32	X:T	195	97	DSZ
078	03	03	137	43	RCL	196	03	03
079	43	RCL	138	01	01	197	01	01
080	04	04	139	67	EQ	198	83	83
081	85	+	140	01	01	199	25	CLR
082	08	8	141	56	56	200	91	R/S
083	95	=	142	43	RCL	201	76	LBL
084	42	STO	143	02	02	202	13	C
085	01	01	144	67	EQ	203	71	SBR
086	43	RCL	145	01	01	204	24	CE
087	01	01	146	56	56	205	42	STO
088	67	EQ	147	73	RC*	206	01	01
089	00	00	148	02	02	207	43	RCL
090	95	95	149	94	+/-	208	07	07
091	73	RC*	150	65	×	209	71	SBR
092	00	00	151	73	RC*	210	24	CE
093	64	PD*	152	01	01	211	73	RC*
094	01	01	153	95	=	212	00	00
095	43	RCL	154	74	SM*	213	55	÷
096	06	06	155	00	00	214	73	RC*
097	44	SUM	156	69	OP	215	01	01
098	01	01	157	20	20	216	95	=
099	97	DSZ	158	69	OP	217	91	R/S
100	03	03	159	21	21	218	69	OP
101	00	00	160	97	DSZ	219	20	20
102	86	86	161	03	03	220	69	OP
103	08	8	162	01	01	221	21	21
104	85	+	163	34	34	222	61	GTO
105	43	RCL	164	43	RCL	223	02	02
106	04	04	165	06	06	224	11	11
107	95	=	166	44	SUM	225	76	LBL
108	42	STO	167	02	02	226	10	E'
109	02	02	168	43	RCL	227	08	8
110	32	X:T	169	04	04	228	42	STO
111	42	STO	170	42	STO	229	00	00
112	08	08	171	01	01	230	43	RCL
113	75	-	172	97	DSZ	231	06	06
114	43	RCL	173	05	05	232	44	SUM
115	04	04	174	01	01	233	00	00
116	85	+	175	30	30	234	73	RC*
117	01	1	176	43	RCL	235	00	00
118	95	=	177	06	06	236	91	R/S
119	42	STO	178	42	STO	237	61	GTO
120	04	04	179	03	03	238	02	02
121	42	STO	180	43	RCL	239	30	30

4 Aufarbeitung eines praktischen Beispiels mit Hilfe des Programms (2. Teil)

Das Ausgangstableau der Aufgabe aus Abschnitt 2 lautet:

$$
\begin{array}{c|ccccccc|ll}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & & \\
u_1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 20 & 5 & \\
u_2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 4 & \leftarrow \\
u_3 & 3 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 6 & 6 & \\
u_4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 8 & 8 & \\
 & -6 & -2 & -1 & -2 & -4 & -8 & 0 & & \\
 & & & & & & \uparrow & & &
\end{array}
$$

Wir geben das Ausgangstableau, welches 7 Spalten und 5 Zeilen hat, gemäß folgenden Benutzerhinweisen ein.

5 Benutzerhinweise

1. Eingabe von Spalten und Zeilen

1a) Spaltenzahl n

1b) Zeilenzahl m

2. Spaltenweise Eingabe der Elemente des Ausgangstableaus beginnend mit Spalte 1

   (Zur Korrektur eines Eingabefehlers in der Spalte k geben Sie einfach k ein und drücken B. Dann geben Sie über die Taste R/S die gesamte Spalte neu ein).

Eingabe	Befehl	Anzeige
n	x ⟷ t	t-Register
m	A	n
1	B	0
a_{11}	R/S	a_{11}
a_{21}	R/S	a_{21}
·	R/S	·
a_{mn}	R/S	a_{mn}

3. Ermittlung der Quotienten für das Quotientenkriterium. Eingabe i für Spalte i mit kleinstem Element in der Zielfunktion:

   $Q_1 = b_1 : a_{1i}$

   Ermittlung der weiteren Quotienten über R/S.

   Der kleinste Quotient Q_l bestimmt die Ausgangszeile l.

Eingabe	Befehl	Anzeige
i	C	Q_1
	R/S	Q_2
	.....	..
	R/S	Q_m

4. Ermittlung des neuen Tableaus

4a) i-te Spalte ist Eingangssp.

4b) l-te Zeile ist Ausgangszeile

5. Ausgabe des neuen Tableaus beginnend mit 1. Element der k-ten Spalte.

5a) Ausgabe der Zielfunktion

Eingabe	Befehl	Anzeige
i	x ⟷ t	t-Register
l	D'	0
k	E	a_{1k}
	E'	a_{m1}
	R/S	a_{m2} ···

6. Wiederholung der Schritte 3–5 bis zur Optimallösung

Anmerkung:

Spaltenzahl = Variablenzahl + 1

Zeilenzahl = Zahl der Schlupfvariablen + 1

6 Lösung des Problems

Das kleinste Element in der Zielfunktion des Ausgangstableaus ist − 8 in der 6. Spalte. Quotientenkriterium (Ergebnis im Ausgangstableau schon festgehalten) liefert:

Zeile 2 ist Ausgangszeile.

Damit ergeben sich folgende Iterationen:

$$\begin{array}{c|ccccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & u_2 & & \\ \hline u_1 & & & & & & & & 4 \\ x_6 & & & & & & & & \infty \\ u_3 & & & & & & & & 1 \leftarrow \\ u_4 & & & & & & & & 4 \\ & 26 & \underset{\uparrow}{-2} & -1 & 6 & 12 & 8 & 32 & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{c|ccccccc|c} & x_1 & u_3 & x_3 & x_4 & x_5 & u_2 & & \\ \hline u_1 & & & & & & & & 3 \\ x_6 & & & & & & & & 4 \\ x_2 & & & & & & & & 1 \\ u_4 & & & & & & & & 3 \\ & 25 & 1 & 0 & 9 & 12 & 7 & \underline{34} & \end{array}$$

Es ist nicht nötig, die vollständigen neuen Tafeln anzugeben (wiewohl möglich). In den Zwischentafeln (es sind noch negative Werte in der Zielfunktion) benötigt man die Zielfunktion und die Quotienten, in der Schlußtafel (alle Werte der Zielfunktion sind ⩾ 0) wird aber die n-te Spalte benötigt (Ausgabe über n E, R/S usw.).

Wesentlich am Simplexverfahren ist der Austausch der Variablen gegen die Schlupfvariablen, der gemäß

EINGANGSSPALTE ⟷ AUSGANGSZEILE

durchgeführt werden muß.

Aus der Schlußtafel kann man folgende Lösung ablesen:

$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 4,\ z_{max} = 34$

Literaturhinweis

Die hier behandelte, platzsparende Weise des Simplexverfahrens haben wir dem Buch

Brunner, Gleissner, Kunesch: Lehrbuch der Mathematik VI für Handelsakademien (Planungsmathematik), Österr. Gewerbeverlag, Wien

entnommen.