

In verschiedenen Fachgebieten der Naturwissenschaften und Technik werden Werte gemessen. Die Verarbeitung dieser Werte zu empirischen Funktionsgleichungen gewinnt mit leistungsfähigen elektronischen Rechnern wie zum Beispiel dem TI-59 an Bedeutung. Mit dem vorliegenden Beitrag werden die Probleme der Programmierung des TI-59 zur Bestimmung der Koeffizienten von Linearkombinationen beschrieben. Besonders wird auf Erfahrungen in der Einbeziehung der Modultechnik eingegangen. Mit drei Beispielen werden Anwendungsmöglichkeiten des Programms LINKOMB aufgezeigt. Die Programme AUSPOLY und FEQUASUM desselben Autors (s. Programmsammlung) ergänzen diesen Beitrag.

Gerhard Frank

Bestimmung der Koeffizienten von Linearkombinationen

1 Aufgabenstellung

Meßwerte oder statistische Werte werden als Wertetafel oder Kurve in verschiedenen Fachgebieten von Naturwissenschaften und Technik erfaßt. Möchte man eine so gegebene Funktion in ein Rechenprogramm einbeziehen, benötigt man für den funktionellen Zusammenhang eine Funktionsgleichung. Eine Forderung nach einer Funktionsgleichung kann sich auch daraus ableiten, daß man aus der Wertetafel einer numerisch gelösten Differentialgleichung eine Funktionsgleichung zu formulieren hat. Diese Methode wird angewendet, wenn die Funktionsgleichung entweder unbekannt oder zu kompliziert oder nicht für den Rechnertyp geeignet ist. Zum Beispiel kann die sin-Funktion im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ mit dem *Ausgleichspolynom*

$$\bar{y}(x) = 0,9998x - 0,1659x^3 + 0,0076x^5 \quad 1)$$

angenähert werden (vgl. **Tabelle 1**). Mit Methoden der Ausgleichsrechnung gewinnt man empirische Funktionsgleichungen. Die ausgeglichenen Funktionswerte $\bar{y}(x)$ haben mit den Meßwerten x_i, y_i so gut wie nötig übereinzustimmen. Die verbreitetste Methode hierzu ist die Annäherung nach der *Methode der kleinsten Quadratsumme*. Anhand der vorliegenden Kurve wählt

Tabelle 1 Funktionswerte eines Ausgleichspolynoms für $y = \sin x$

x in rad	y = sin x	\bar{y}	$(y - \bar{y}) \cdot 10^{-5}$
0	0	0	0
0,1	0,09983	0,09981	2
0,2	0,19867	0,19864	3
0,3	0,29552	0,29548	5
0,4	0,38942	0,38938	4
0,5	0,47943	0,47940	3
0,6	0,56464	0,56464	0
0,7	0,64422	0,64424	-2
0,8	0,71736	0,71739	-3
0,9	0,78333	0,78337	-4
1,0	0,84147	0,84151	-4
1,1	0,89121	0,89122	-1
1,2	0,93204	0,93202	2
1,3	0,96356	0,96350	6
1,4	0,98545	0,98540	5
1,5	0,99749	0,99755	-6

man einen „passenden“ Kurventyp (Parabel, e-Funktion, trigonometrische Funktion usw.), oder bildet aus gewählten Funktionstypen eine Linearkombination. (Weitere Möglichkeiten für Ausgleichskurven siehe einschlägige Literatur.) In beiden genannten Fällen sind Koeffizienten mit erheblichem Rechenaufwand zu bestimmen. Diese Aufgabenstellung rückt mit leistungsfähigen elektronischen Rechnern am

1) Koeffizienten mit Programm LINKOMB berechnet.

Arbeitsplatz zunehmend in den Vordergrund. Praktische Beispiele derartiger Ausgleichungen sind in [1] bis [6] beschrieben.

2 Lösungswege, Rechenvorschrift und Programmablaufplan

Einige wenige Erklärungen, [6] entnommen, sollen zum besseren Verständnis beitragen. Zum Ausgleich von Meßwerten kann aus k Funktionen

$$f_k(x), k = 1, 2, 3, \dots, m,$$

eine Linearkombination

$$F_k(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_k f_k(x)$$

gebildet werden. Im einfachsten Fall, dem Ausgleichspolynom, lautet diese Linearkombination

$$F_k(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_k x^{k-1}.$$

Andere beliebige Funktionen können ebenso kombiniert werden wie zum Beispiel

$$f_k(x) = e^{b_k x},$$

$$F_k(x) = a_1 e^{b_1 x} + a_2 e^{b_2 x} + \dots + a_k e^{b_k x}.$$

Zu berechnen sind die Koeffizienten a_k bzw. b_k nach der Rechenvorschrift

$$a = N^{-1} \cdot y^*, \tag{1}$$

wobei

$$N = F' \cdot F \text{ und } y^* = F' \cdot y \tag{2}$$

sind. Der Spaltenvektor a in Gl. (1) mit den Elementen a_k ergibt sich aus dem Produkt der inversen Matrix von N und dem Spaltenvektor y^* (y „Stern“). Die Normalmatrix N wird aus dem Produkt der transponierten Matrix F' und F gebildet, während der Spaltenvektor y^* aus F' und dem Spaltenvektor y mit den Elementen y_i berechnet wird. Ausgeschrieben lauten die Matrizen F' , y und a

$$F' = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_k(x_1) & \dots & f_k(x_n) \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \tag{3}$$

mit $i = 1, 2, \dots, n$ und $k = 1, 2, \dots, m$.

Die n Spalten der Matrix F' sind mit der Zahl der Wertepaare und die m Zeilen mit der Zahl der zu bestimmenden Koeffizienten identisch. Mit den

Gl. (1) und (2) werden folgende Rechenvorschriften für den Programmablaufplan untersucht:

Variante 1	Variante 2	Variante 3
(1) $N := F' F$	(1) $y^* := F' y$	(1) $a := N^{-1} y^*$
(2) $y^* := F' y$	(2) $N := F' F$	
(3) $a := N^{-1} y^*$	(3) $a := N^{-1} y^*$	

Bei *Variante 1* ist die Matrix F' manuell zu formulieren, so daß deren Elemente nach einheitlicher Vorschrift dem Programmablauf zugeführt werden können. Danach sind die y_i einzugeben, die direkt, ohne manuelle Vorarbeit der Wertetafel entnommen werden. *Variante 2* erfordert ebenfalls die Aufstellung der Matrix F' , ermöglicht aber eine an die Eingabe von F' unmittelbar anschließende Eingabe der y_i . Der Spaltenvektor y^* muß jedoch vor der Berechnung und Speicherung von N abgelegt werden. *Variante 3* bedingt die manuellen Formulierungen von N und y^* . Für ein Ausgleichspolynom ist dies verhältnismäßig einfach. Beim Programm AUSPOLY (s. Programmsammlung) zur Bestimmung der Koeffizienten von Ausgleichspolynomen dienen die formulierten Matrizen N und y^* zur Programmierung. Nach Eingabe der x_i, y_i in das Programm AUSPOLY werden N und y^* direkt ohne Zwischenrechnung berechnet und gespeichert. Für das Programm LINKOMB zur Bestimmung der Koeffizienten von Linearkombinationen entschied sich der Verfasser aus folgenden Gründen für *Variante 1*:

- manuelles Formulieren und Programmieren der Matrix N ist aufgrund der Vielfalt des Programms LINKOMB nicht zweckmäßig,
- die Modulprogramme ML-02 „Matrixinversion, Determinanten und Simultangleichungen“ und ML-03 „Matrixaddition und Multiplikation“ vom TI-59 können genutzt werden,
- die Matrix F' ist einfach aufzustellen, und der Spaltenvektor y ist direkt aus der Wertetafel ablesbar,
- das Transportieren von F' zu F und die Berechnung von N kann programmiert erfolgen,
- bei Variante 1 sind mehr Datenspeicher verfügbar als bei Variante 2, denn y^* wird erst nach N gespeichert und überschreibt Datenspeicherinhalte von Zwischenrechnungen (bei Variante 2 müßten aus diesem Grunde Abstriche im Leistungsvermögen des Programms vorgenommen werden).

Als Nachteil von Variante 1 wäre zu nennen, daß zwischen der Eingabe von F' und der von y eine längere Programmablaufzeit durch die Berechnung von N

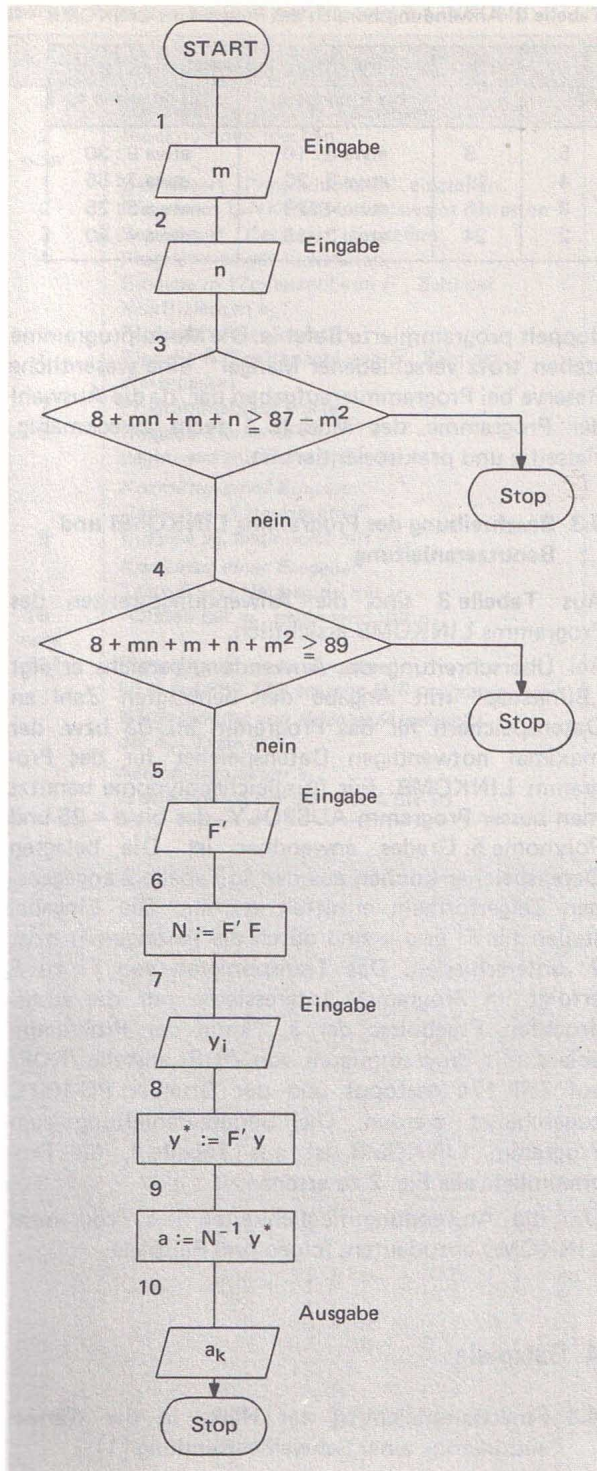


Fig. 1 Programmablaufplan des Programms LINKOMB

verstreicht (vgl. Tabelle 3). Dieser Nachteil wird zugunsten größerer Leistungsfähigkeit gegenüber Variante 2 in Kauf genommen. In Fig. 1 ist der Programmablaufplan des Programms LINKOMB dargestellt.

3 Programmierung

3.1 Zielstellung

Für die Programmkonzeption werden folgende Ziele gesteckt:

- minimale manuelle Handlungen, um Eintastfehler auszuschließen, Abrundungsfehler durch Neueintasten weitgehend einzuschränken,
- optimale Auslastung der Programm- und Datenspeicherkapazität des TI-59,
- Nutzen von Gegebenheiten durch Einbeziehen der OP-Funktionen und der Modulprogramme.

3.2 Verwendung von Modulprogrammen in freien Programmen

Welche Erfahrungen wurden mit Modul-Unterprogrammen gesammelt?

1. Programmkenndaten und Benutzeranleitung:

Rechenvorschrift, angegebene Kenndaten, Datenspeicherbelegungen, Benutzeranleitung der einzubeziehenden Modulprogramme sind aufmerksam zu studieren, um zum Beispiel freie Datenspeicher sofort zu erkennen. Hierbei kann man schon feststellen, daß

- die angegebenen Kenndaten nicht ausreichen,
- die unterschiedliche „Handschrift“ der Programmierer der Modulprogramme die Kopplung von Modulprogrammen erschwert.

Zum Beispiel werden im ML-03 den Größen m und n die Speicher R_{03} und R_{04} , n im ML-02 dagegen R_{07} zugewiesen.

2. Modul-Programmausdruck und Programmanalyse:

Zur Analyse des Programmablaufs der betreffenden Programmsegmente der zu koppelnden Modulprogramme hat man eine Programmliste auszudrucken. Die Modul-Programmanalyse ist wie jede andere Programmanalyse meist eine schwierige, zeitraubende Arbeit, die aber für ein optimales Programm unerlässlich ist. Man erkennt, welche Datenspeicher tatsächlich belegt werden und kann kurzzeitig über nicht

belegte verfügen. Flagstatus und T-Speicherinhalt sind festzuhalten. Aus der Analyse des Modulprogramms muß auch die Rekonstruktion der Zeigerformeln folgen, um die verfügbare Datenspeicherkapazität für das freie Programm festlegen zu können. Folgende Zeigerformeln gelten für die Modulprogramme ML-02 und ML-03 (Tabelle 2):

Tabelle 2 Zeigerformeln der Programme ML-02, ML-03, LINKOMB

Programm	Marke	Zweck	Zeigerformel
ML-02	B	N speichern	R ₈ bis R _{m2+7}
	C	det N	R _{m2+8} bis R _{m(m+1)+7}
ML-03	A'	y* und a _k	R _{m(m+1)+8} bis R _{m(m+2)+7}
	B	F' speichern	R ₈ bis R _{mn+7}
	B'	y bzw. F	R _{m(n+1)+9} bis R _{m(n+1)+n+8}
LINKOMB	D'	N bzw. y*, eine Spalte	R _{mn+8} bis R _{m(n+1)+7}
	N		R _{87-m2} bis R ₈₆
	y*		R _{87-m(m+1)} bis R _{86-m2}

Mit dem Modulprogrammausdruck wird auch ein Sprung vom im Programmspeicher gespeicherten Programm in ein Modulprogramm mit den Befehlen /Pgm/ /m/ /m/ /SBR/ /n/ /n/ /n/ möglich. Somit kann man einen Programmspeicherplatz (PSP) im Modulprogramm direkt anwählen und das auf diesen PSP folgende Programmsegment in das freie Programm einbeziehen, wenn am Ende dieses Segments ein RNT-Befehl steht.¹⁾ Bei ganz „harten Nüssen“ in der Modulprogrammanalyse kommt man mit der Übernahme des Modulprogramms in den Programmspeicher, der Eingabe einfacher Zahlen und TRACE-Betrieb zum Ziel.

3. Planung des freien Programms:

Nachdem die Wirkung der Zeigerformeln und der „Mechanismus“ des Modulprogramms klar sind, kann der Anwendungsbereich des freien Programms abgesteckt werden. Veränderte Zeigerformeln oder Druckbefehle, im Programmspeicher programmiert, können das Modulprogramm unter Umständen besser an die anstehende Aufgabe anpassen (z. B. gewünschter x-y-Ausdruck [7]). Abschließend zur Programmierung prüft man freies und Modulprogramm auf eventuell

1) Die Bedienungsanleitung zum TI-59 sieht nur die Befehlsfolgen /Pgm/ /m/ /m/ /SBR/ /allg. Marke/ oder /Pgm/ /m/ /m/ /Programmadrstaste/ für einen Sprung in ein Modulprogramm vor.
 2) Unvollständige und teils falsche Programmkenndaten, Wahl der Datenspeicher.

Tabelle 3 Anwendungsbereich des Programms LINKOMB

m	n	Programmlaufzeit in min : s	
		bis Eingabe y _i	bis Ausgabe a _k
5	8	etwa 6 : 10	etwa 9 : 30
4	11	etwa 5 : 20	etwa 7 : 55
3	16	etwa 4 : 25	etwa 6 : 25
2	24	etwa 3 : 15	etwa 4 : 50

doppelt programmierte Befehle. Die Modulprogramme stellen trotz verschiedener Mängel²⁾ eine wesentliche Reserve bei Programmieraufgaben dar, da die Auswahl der Programme des Moduls 1 recht zweckmäßig, vielseitig und praxisorientiert ist.

3.3 Beschreibung des Programms LINKOMB und Benutzeranleitung

Aus Tabelle 3 sind die Anwendungsgrenzen des Programms LINKOMB ersichtlich.

Bei Überschreitung des Anwendungsbereichs erfolgt „Blinkstop“ mit Angabe der benötigten Zahl an Datenspeichern für das Programm ML-03 bzw. der maximal notwendigen Datenspeicher für das Programm LINKOMB. Für Ausgleichspolynome benutzt man besser Programm AUSPOLY, das bis n = 25 und Polynome 5. Grades anwendbar ist. Die belegten Datenspeicher können aus den in Tabelle 2 angegebenen Zeigerformeln ermittelt werden. Die Eingabestellen für F' und y sind durch die Anzeigen 1. bzw. 2. unterschieden. Das Transponieren von F' zu F erfolgt im Programm. Interessieren nur die ausgedruckten Ergebnisse der a_k, kann der Programmablauf mit Programmieren von /R/S/ anstelle /NOP/ auf PSP 174 gestoppt und der Drucker PC-100 C zugeschaltet werden. Die Benutzeranleitung zum Programm LINKOMB ist aus Tabelle 4, die Programmliste aus Fig. 2 zu ersehen.

Um die Anwendungsmöglichkeiten des Programms LINKOMB anzudeuten, folgen drei Beispiele.

4 Beispiele

4.1 Funktionsgleichung der Härte in der Wärmeinflußzone einer Schweißverbindung [1]

Messung der Härte HV 30 in Abhängigkeit der Abkühlzeit t_A in s zwischen 850 °C und 500 °C in der Wärmeinflußzone einer Stahl-Schweißverbindung (Tabelle 5).

Koeffizienten von Linearkombinationen

Tabelle 4 Benutzeranleitung zum Programm LINKOMB

Schritt	Verfahren	Eingabe	Befehl	Anzeige
1	Magnetkarte in Block 1 einlesen			1.
2	Blocknummer löschen		CLR	0.
oder				
1	Betriebsart „Programmieren“ einstellen		LRN	000 00
2	Programm LINKOMB befehlsweise eintasten			
3	Betriebsart „Rechnen“ einstellen		LRN	0.
4	Programmzeiger rückstellen, Eingabe m (Zeilenzahl von F' , Zahl der Koeffizienten a_k)	m	RST	m
5	Programmablauf starten		R/S	m
6	Eingabe n (Spaltenzahl von F' , Zahl der Wertepaare)	n		n
7	Programmablauf starten		R/S	
8	Eingabe Elemente F' , beginnend mit Zeile 1, Spalte 1, <i>Korrektur einer Eingabe:</i> Taste A und Neubeginn F'	F'	R/S A	1.
9	Eingabe y_i , beginnend mit y_1 , <i>Korrektur einer Eingabe:</i> Taste B und Neubeginn mit y_1	y_i	R/S B	2.
10	AbleSEN der a_k , beginnend mit a_1	y_i	R/S	a_k
oder				
10	Programmiertes Ausdrucken: NOP auf PSP 178 anstelle R/S programmieren. <i>Wiederholung von Anzeige/Ausdruck</i> der a_k : Taste C <i>Berechnung neuer a_k:</i> Wiederholung der Schritte 4 bis 10		C	0. a_k

000	47	CMS	029	08	8	058	42	STD	087	36	PGM	116	16	A'	145	12	B
001	36	PGM	030	85	+	059	89	89	088	03	03	117	36	PGM	146	18	C'
002	03	03	031	43	RCL	060	01	1	089	18	C'	118	03	03	147	36	PGM
003	11	A	032	03	03	061	36	PGM	090	43	RCL	119	18	C'	148	02	02
004	91	R/S	033	95	=	062	03	03	091	03	03	120	43	RCL	149	13	C
005	36	PGM	034	77	GE	063	17	B'	092	42	STD	121	03	03	150	43	RCL
006	03	03	035	91	R/S	064	69	DP	093	06	06	122	42	STD	151	07	07
007	11	A	036	32	X:T	065	25	25	094	01	1	123	06	06	152	42	STD
008	09	9	037	08	8	066	43	RCL	095	36	PGM	124	10	E'	153	89	89
009	69	DP	038	09	9	067	05	05	096	03	03	125	01	1	154	10	E'
010	17	17	039	32	X:T	068	42	STD	097	19	D'	126	36	PGM	155	01	1
011	03	3	040	85	+	069	88	88	098	17	B'	127	03	03	156	36	PGM
012	42	STD	041	43	RCL	070	43	RCL	099	97	DSZ	128	19	D'	157	02	02
013	87	87	042	03	03	071	04	04	100	89	89	129	17	B'	158	14	D
014	76	LBL	043	33	X^2	072	42	STD	101	00	00	130	07	7	159	18	C'
015	11	A	044	95	=	073	06	06	102	60	60	131	42	STD	160	25	CLR
016	19	D'	045	77	GE	074	73	RC#	103	76	LBL	132	87	87	161	36	PGM
017	32	X:T	046	91	R/S	075	88	88	104	12	B	133	43	RCL	162	02	02
018	43	RCL	047	01	1	076	36	PGM	105	43	RCL	134	03	03	163	15	E
019	03	03	048	36	PGM	077	03	03	106	04	04	135	36	PGM	164	76	LBL
020	65	X	049	03	03	078	91	R/S	107	42	STD	136	02	02	165	13	C
021	43	RCL	050	12	B	079	43	RCL	108	00	00	137	11	A	166	43	RCL
022	04	04	051	16	A'	080	03	03	109	01	1	138	33	X^2	167	07	07
023	85	+	052	19	D'	081	44	SUM	110	36	PGM	139	42	STD	168	42	STD
024	42	STD	053	07	7	082	88	88	111	03	03	140	89	89	169	89	89
025	00	00	054	42	STD	083	97	DSZ	112	17	B'	141	19	D'	170	01	1
026	43	RCL	055	05	05	084	06	06	113	02	2	142	01	1	171	36	PGM
027	04	04	056	43	RCL	085	00	00	114	32	X:T	143	36	PGM	172	02	02
028	85	+	057	03	03	086	74	74	115	32	X:T	144	02	02	173	16	A'

Fig. 2 Programmliste des Programms LINKOMB

Fig. 2 (Fortsetzung)

174	68	NDP	185	76	LBL	196	17	B'	207	92	RTN	218	89	89	229	08	8
175	36	PGM	186	16	A'	197	36	PGM	208	76	LBL	219	18	C'	230	07	7
176	02	02	187	91	R/S	198	03	03	209	18	C'	220	92	RTN	231	75	-
177	91	R/S	188	36	PGM	199	91	R/S	210	73	RC*	221	76	LBL	232	73	RC*
178	68	NDP	189	03	03	200	72	ST*	211	00	00	222	10	E'	233	87	87
179	97	DSZ	190	91	R/S	201	00	00	212	36	PGM	223	73	RC*	234	33	X²
180	89	89	191	97	DSZ	202	69	DP	213	02	02	224	87	87	235	95	=
181	01	01	192	00	00	203	20	20	214	91	R/S	225	94	+/-	236	42	STD
182	75	75	193	16	A'	204	97	DSZ	215	69	DP	226	85	+	237	00	00
183	25	CLR	194	92	RTN	205	06	06	216	20	20	227	76	LBL	238	92	RTN
184	91	R/S	195	76	LBL	206	17	B'	217	97	DSZ	228	19	D'	239	00	0

Als Funktionstyp wird ein Ausgleichspolynom gewählt:

$$\bar{y}(x) = a_1 + a_2 (\lg t_A) + a_3 (\lg t_A)^2 + a_4 (\lg t_A)^3 + a_5 (\lg t_A)^4.$$

Da die y_i direkt aus Tabelle 5 entnommen werden, ist nur F' zu formulieren:

$$F' = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ x_1^3 & \dots & x_n^3 \\ x_1^4 & \dots & x_n^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,4099 & 0,9800 & 1,2201 & 1,5299 & 1,9900 & 2,3300 \\ 0,1680 & 0,9604 & 1,4887 & 2,3407 & 3,9600 & 5,4289 \\ 0,0689 & 0,9412 & 1,8163 & 3,5812 & 7,8804 & 12,6495 \\ 0,0282 & 0,9224 & 2,2161 & 5,4790 & 15,6819 & 29,4733 \end{bmatrix}$$

mit $m = 5$ und $n = 6$.

Unmittelbar vor der Eingabe von F' in das Programm LINKOMB müssen deren Elemente manuell mit den Tasten /log/ /x²/ bzw. /y^x/ berechnet werden, wobei von den t_A auszugehen ist. Als Ergebnisse erhält man:

$$\begin{aligned} a_1 &= 148,7044241 & a_4 &= -60,79135207 \\ a_2 &= -144,4956228 & a_5 &= 9,714210313 \\ a_3 &= 139,5525646 \end{aligned}$$

Das Ausgleichspolynom lautet:

$$\bar{y}(x) = 148,7 - 144,5 \lg t_A + 139,55 (\lg t_A)^2 - 60,8 (\lg t_A)^3 + 9,71 (\lg t_A)^4.$$

In Tabelle 5 sind die ausgeglichenen Werte \bar{y} eingetragen.

Tabelle 5 Meßwerte und Ergebnisse des Beispiels 4.1

t_A in s	$x = \lg t_A$	$y = HV\ 30$	\bar{y}	$y - \bar{y}$
2,57	0,4099	109	109	0
9,55	0,9800	93	93	0
16,60	1,2201	91	91	0
33,88	1,5299	90	90	0
97,72	1,9900	87	87	0
213,80	2,3300	87	87	0

Tabelle 6 Meßwerte und Ergebnisse des Beispiels 4.2

$x = \text{Länge}$	$y = \text{Druck}$	\bar{y}	$y - \bar{y}$
0	0,5991	0,6065	-0,0074
0,1955	0,6107	0,6017	0,0090
0,3802	0,6550	0,6465	0,0085
0,5555	0,7380	0,7377	0,0003
0,7071	0,8500	0,8658	-0,0158
0,8325	1,0300	1,0385	-0,0085
0,9250	1,3500	1,3312	0,0188
0,9802	2,4200	2,4223	-0,0023

4.2 Funktionsgleichung der Druckverteilung an einem Tragflügelprofil [6]

Folgende 8 Meßpunkte liegen vor (Tabelle 6). Als Funktionstyp wird angesetzt:

$$\bar{y}(x) = \frac{a_1}{1-x} + a_2 + a_3 x + a_4 x^2.$$

F' mit $m = 4$ und $n = 8$ hat folgendes Aussehen:

$$F' = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-x_1} & \dots & \frac{1}{1-x_n} \\ 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ x_1^2 & \dots & x_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1,2430 & 1,6134 & 2,2497 & 3,4141 & 5,9701 & 13,3333 & 50,5051 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,1955 & 0,3802 & 0,5555 & 0,7071 & 0,8325 & 0,9250 & 0,9802 \\ 0 & 0,0382 & 0,1446 & 0,3086 & 0,5000 & 0,6931 & 0,8556 & 0,9608 \end{bmatrix}$$

4.	m	1.	F	71.32881816	N	2786.046341	N
		1.24300808	erste	4.576	dritte	79.32881816	
8.	n	1.613423685	Spalte	3.50081624	Spalte	71.32881816	
		2.249718785		2.897581103		66.75281816	
		3.414134517				79.32881816	
1.	F'	5.970149254				8.	
1.		13.33333333		0.	F	4.576	
0.		50.50505051		0.03822025	vierte	3.50081624	
0.				0.14455204	Spalte	71.32881816	
1.24300808		2786.046341	N	0.30858025		4.576	
1.		79.32881816	erste	0.49999041		3.50081624	
0.1955		71.32881816	Spalte	0.69305625		2.897581103	
0.03822025		66.75281816		0.855625		66.75281816	
1.613423685				0.96079204		3.50081624	
1.						2.897581103	
0.3802		1.	F			2.503110711	
0.14455204		1.	zweite	66.75281816	N		
2.249718785		1.	Spalte	3.50081624	vierte		
1.		1.		2.897581103	Spalte	327.5271841	det N
0.5555		1.		2.503110711			
0.30858025		1.				153.3487803	y*
3.414134517		1.				8.2528	
1.		1.		0.5991	y	5.85772585	
0.7071				0.6107		4.96480519	
0.49999041	79.32881816		N	0.655			
5.970149254	8.		zweite	0.738			
1.	4.576		Spalte	0.85		0.0278005116	a _k
0.8325	3.50081624			1.03		5787714984	
0.69305625				1.35		-1257574813	
13.33333333				2.42		6476411095	
1.	0.1955		F				
0.925	0.3802		dritte				
0.855625	0.5555		Spalte				
50.50505051	0.7071			153.3487803	y*		
1.	0.8325			8.2528			
0.9802	0.925			5.85772585			
0.96079204	0.9802			4.96480519			
				4.			

Fig. 3 Druckbild vom Beispiel 4.2 mit Zwischenergebnissen

Fig. 3 zeigt das Druckbild dieser Rechnung. Die gesuchte Funktionsgleichung ist somit bestimmt:

$$\bar{y}(x) = \frac{0,0278}{1-x} + 0,5787 - 0,1857 x + 0,647 x^2.$$

Tabelle 6 zeigt die ausgeglichenen Werte \bar{y} .

4.3 Funktionsgleichung des Leerlaufverlusts eines Generators [6]

Messung des Leerlaufverlusts W eines Generators in kW in Abhängigkeit der Spannung U in V (Tabelle 7):

Als Funktionstyp wird vorgesehen:

$$\bar{y}(x) = a_1 e^{b_1 x} + a_2 e^{b_2 x}.$$

Die Lösung erfolgt nach [6] für äquidistante x ,

$$x = \frac{U - 425}{195},$$

so daß

$$x_k = h(k - 1) \text{ mit } h = 2/3. \tag{4}$$

Tabelle 7 Meßwerte und Ergebnisse des Beispiels 4.3

U	x	y = W	\bar{y}	y - \bar{y}
230	-1	64,0	64,02	-0,02
295	-2/3	66,0	66,20	-0,2
360	-1/3	69,5	69,42	0,08
425	0	74,0	74,09	-0,09
490	1/3	80,8	80,80	0
555	2/3	91,0	90,36	0,64
620	1	103,5	103,90	-0,40

Wenn

$$v_1 = e^{b_1 h} \text{ und } v_2 = e^{b_2 h}, \tag{5}$$

dann ist

$$\bar{y}_k = a_1 v_1^{k-1} + a_2 v_2^{k-1}. \tag{6}$$

Zuerst sind über v_1, v_2 die b_1, b_2 , dann die a_1, a_2 mit aufzustellenden Gleichungssystemen zu berechnen, die die Eingangsgrößen F' und y nach den Gl. (3) enthalten. Das Programm LINKOMB ist hierzu zweimal anzuwenden.

Das erste Gleichungssystem mit den Substitutionsgrößen s_1, s_2 lautet:

$$\begin{aligned} 64 s_2 + 69,5 s_1 &= -80,8 \\ 66 s_2 + 74 s_1 &= -91 \\ 69,5 s_2 + 80,8 s_1 &= -103,5 \end{aligned}$$

Demzufolge lassen sich F', y und s (entspricht a) darstellen:

$$F' = \begin{bmatrix} 64 & 66 & 69,5 \\ 69,5 & 74 & 80,8 \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} -80,8 \\ -91 \\ -103,5 \end{bmatrix}; s = \begin{bmatrix} s_2 \\ s_1 \end{bmatrix}; \text{ mit } m = 2, n = 3.$$

Es kann abgelesen werden:

$$s_1 = -2,941083091 \quad s_2 = 1,926758163$$

Die v_1, v_2 ergeben sich nach [6] aus den s_1, s_2 :

$$\begin{aligned} v^2 + s_1 v + s_2 &= 0 \\ v_1 &= 1,956066286 \\ v_2 &= 0,985016805 \end{aligned}$$

Das zweite Gleichungssystem zur Bestimmung der a_1, a_2 erhält man aus den Gl. (4) und (6):

$$\begin{aligned} a_1 1,956066286^{-1,5} + a_2 0,985016805^{-1,5} &= 64 \\ a_1 1,95 \dots^{-1} + a_2 0,98 \dots^{-1} &= 66 \\ a_1 1,95 \dots^{-0,5} + a_2 0,98 \dots^{-0,5} &= 69,5 \\ a_1 &= 74 \\ a_1 1,95 \dots^{0,5} + a_2 0,98 \dots^{0,5} &= 80,8 \\ a_1 1,95 \dots + a_2 0,98 \dots &= 91 \\ a_1 1,95 \dots^{1,5} + a_2 0,98 \dots^{1,5} &= 103,5 \end{aligned} \quad ; y = \begin{bmatrix} 64 \\ 66 \\ 69,5 \\ 74 \\ 80,8 \\ 91 \\ 103,5 \end{bmatrix}; a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Die Matrix F' wird formuliert:

$$F' = \begin{bmatrix} 1,956066286^{-1,5} & 1,95 \dots^{-1} & 1,95 \dots^{-0,5} & 1 & 1,95 \dots^{0,5} & 1,95 \dots^{1,5} \\ 0,985016805^{-1,5} & 0,98 \dots^{-1} & 0,98 \dots^{-0,5} & 1 & 0,98 \dots^{0,5} & 0,98 \dots^{1,5} \end{bmatrix}$$

mit $m = 2$ und $n = 7$. Programm LINKOMB berechnet:

$$a_1 = 17,89931607 \quad a_2 = 56,1924127.$$

Die Koeffizienten der Exponenten betragen nach Gl. (5):

$$b_1 = 1,00640319 \quad b_2 = -0,0226448662,$$

so daß die Funktionsgleichung laut Ansatz geschrieben werden kann:

$$\bar{y}(x) = 17,8993 e^{1,0064 \frac{U-425}{195}} + 56,1924 e^{-0,022645 \frac{U-425}{195}}$$

Aus Tabelle 7 sind die ausgeglichenen Werte \bar{y} abzulesen.

Zur Bestimmung der mittleren Fehler der y_1 und a_k kann mit Programm FEQUASUM (s. Programmsammlung) die Fehlerquadratsumme D_{\min} als Maß für die Güte der Ausgleichung [6] berechnet werden:

$$D_{\min} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{k=1}^m a_k y_k^*; \quad y_k^* = \sum_{i=1}^n f_k(x_i) y_i. \quad (7)$$

Abschließend zu diesen Beispielen sei noch bemerkt, daß Programm LINKOMB auch für die harmonische Analyse bis zur zweiten Oberschwingung

$$\bar{y}(x) = a_1 + a_2 \cos x + a_3 \cos 2x + a_4 \sin x + a_5 \sin 2x$$

anwendbar ist.

5 Zusammenfassung

Die Bestimmung der Koeffizienten von Linearkombinationen nach der Methode der kleinsten Quadratsumme beinhaltet einen erheblichen Rechenaufwand, der zudem noch wesentlich vom gewählten Funktionstyp bestimmt wird. Um den manuellen Aufwand zu mindern, sollten die notwendigen Operationen weitestgehend Hilfsmitteln wie zum Beispiel dem Taschenrechner TI-59 übertragen werden. Hierzu versuche man, die Gegebenheiten des Rechnertyps bestmöglich zu nutzen. Beim TI-59 ergeben sich mit den OP-Funktionen und den Modulprogrammen Möglichkeiten, deren Erschließen zwar zeitaufwendig, aber für das anstehende Problem effektiv ist. Die Universalität und Leistungsfähigkeit des TI-59 wird dadurch besonders deutlich. Als Beispiele hierzu können die Programme LINKOMB und AUSPOLY gelten, die beide mit über 860 Programmbefehlen arbeiten (davon 647 bzw. 543 des Moduls) und maximal 80 bzw. 90 Datenspeicher belegen können.

Literatur

- [1] Seyffarth, P., Lübeck, I.: Ausgleich von Meßwerten durch Polynomentwicklung. ZIS-Mitteilungen, Halle/Saale, 20 (1978) 12, S. 1263–1269.
- [2] Naumann, E., Schilling, D.: Rechenprogramm zur Ermittlung der Lagenzahl und der Schweißparameter beim CO₂-Füllschweißen. ZIS-Mitteilungen, Halle/Saale, 18 (1976) 8, S. 780–786.
- [3] Seyffarth, P., Kassatkin, O. G.: Rechnerische Bestimmung der mechanischen Eigenschaften in der Wärmeinflußzone von Schweißverbindungen niedriglegierter Stähle. Schweißtechnik, Berlin, 27 (1977) 2, S. 58–63.
- [4] Frank, G.: Berechnung von Ausschnitten in zylindrischen Wandungen mit frei programmierbaren Rechnern. Teil 2: Rohrförmig verstärkte und kombinierte rohr- und scheibenförmig verstärkte Ausschnitte. Schweißtechnik, Berlin, 30 (1980) 11, S. 513–515.
- [5] Naumann, E.: Rechnergestützte Kennzifferauswertung in der Schweißtechnik. Schweißtechnik, Berlin, 31 (1981) 1, S. 15–17.
- [6] Ludwig, R.: Methoden der Fehler- und Ausgleichsrechnung. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 2. Auflage. (Copyright 1969 by Friedr. Vieweg + Sohn GmbH, Braunschweig)
- [7] Ludwig, H.-J.: Programmoptimierung für Taschenrechner (AOS). Braunschweig/Wiesbaden, Verlag Vieweg, 1979.