

Extrapolationsverfahren eröffnen die Möglichkeit, die Konvergenz einer Folge von Näherungslösungen gewisser, hier noch vorzustellender Verfahren der numerischen Analysis, zu beschleunigen. Derartige Algorithmen kommen für die Lösung von Problemen mit großen Genauigkeitsanforderungen in Frage, wobei vorausgehende Überlegungen zur Fehlerabschätzung erspart bleiben können. Zwei Anwendungsgebiete werden beschrieben: die numerische Integration und Lösung von Anfangswertproblemen (AWP) bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Es wird gezeigt, daß die Vorzüge dieser Methoden dem Gebrauch programmierbarer Taschenrechner nicht vorenthalten bleiben.

Alfred Weis

# Extrapolationsverfahren

## 1 Allgemeines

Der den Extrapolationsalgorithmen zugrundeliegende Gedanke ist einfach: Zu einem Parameter  $h \neq 0$  wollen wir mit  $T(h)$  den Näherungswert für die exakte Lösung eines Problems bezeichnen (z.B. das Ergebnis einer numerischen Integration mit der Sehnentrapezformel zu einer Schrittweite  $h$ ). Für eine Folge von Parametern  $F = \{h_0, h_1, \dots, h_m\}$  mit  $h_0 > h_1 > \dots > h_m > 0$  werden die  $T(h_0), \dots, T(h_m)$  berechnet. Nun bestimmt man den Wert  $\bar{T}_{mm}(0)$  einer interpolierenden polynomialen oder rationalen Funktion  $\bar{T}_{mm}(h)$  (sogar der Ansatz von *Splinefunktionen* wurde in jüngerer Zeit geprüft) mit

$$\bar{T}_{mm}(h_j) = T(h_j) \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, m.$$

$\bar{T}_{mm}(0)$  ist die mittels Extrapolation verbesserte Näherungslösung.

Diese Vorgehensweise kommt jedoch nur unter einer wesentlichen Voraussetzung in Frage: Für das zugrundeliegende numerische Verfahren muß eine asymptotische Entwicklung der Form

$$T(h) = t_0 + t_1 h^{\beta_1} + \dots + t_m h^{\beta_m} + R_{m+1}(h) h^{\beta_{m+1}}$$

existieren, die  $t_j$  sind von  $h$  unabhängig,  $t_0$  ist die exakte Lösung,  $|R_{m+1}(h)| \leq M < \infty$ . Sowohl die

Sehnentrapezformel als auch die modifizierte *Midpoint-rule* – Grundlage für die beschriebenen Extrapolationsverfahren – besitzen eine derartige Entwicklung und zwar ist  $\beta_j = 2j$ . Damit wird auch die Effektivität der Polynominterpolation deutlich: Mit unberücksichtigtem Restglied läßt sich  $T(h)$  als Polynom in  $h^2$  auffassen. Wählt man für  $\bar{T}_{mm}(h)$  den Ansatz

$$\bar{T}_{mm}(h) = a_0 + a_1 h^2 + \dots + a_m h^{2m},$$

so ist für  $\bar{T}_{mm}(0)$  ein sehr guter Näherungswert zu erwarten ( $t_0 \approx a_0$ ).

## 2 Der Interpolationsalgorithmus

Grundlage ist nicht die oben erwähnte polynomiale Interpolation, vielmehr haben praktische Beispiele die Überlegenheit rationaler Funktionen gezeigt. Die Berechnung der Näherung  $\bar{T}_{mm}(0)$  – in beiden Programmen im Label E' enthalten – erfolgt nach einem *Neville*-artigen Algorithmus und ist nur geringfügig komplizierter:  $\bar{T}_{i,k}(h)$  seien rationale Funktionen mit dem Zählergrad  $u = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  und dem Nennergrad  $v = k - u$  der Form

$$\bar{T}_{i,k}(h) = \frac{p_0 + p_1 h^2 + \dots + p_u h^{2u}}{q_0 + q_1 h^2 + \dots + q_v h^{2v}}, \quad 1 \leq k \leq i \leq m,$$

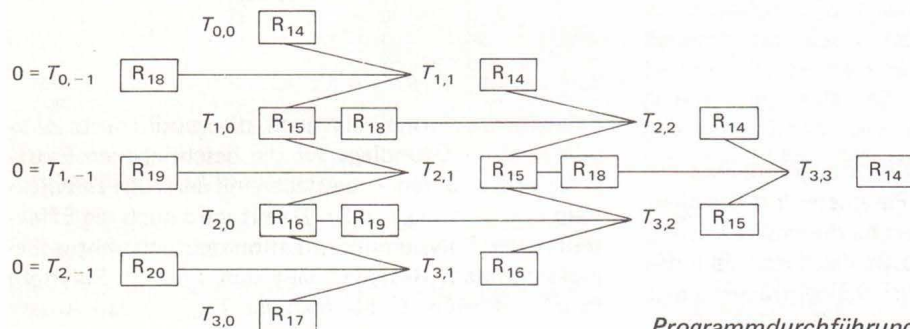
wobei

$$\bar{T}_{i,k}(h_j) = T(h_j) \text{ für } j = i-k, i-k+1, \dots, i.$$

Mit  $\bar{T}_{i,k}(0) := T_{i,k}$  und  $T(h_i) := T_{i,0}$  ergibt sich  $T_{m,m}$  aus folgender Rekursionsformel

$$T_{i,k} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\left[\frac{h_{i-k}}{h_i}\right]^2 \left[1 - \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-2}}\right] - 1}$$

Im folgenden Tableau wird der Rechengang, wie er sich im Programm EX-I (numerische Integration) für den Fall  $m = 3$  vollzieht, dargestellt: Er erfolgt Schrägzeile für Schrägzeile, wobei sich jedes Element aus seinen linken Nachbarelementen und dem gleichhochstehenden übernächsten linken Nachbarelement ergibt.  $T_{3,2}$  – wird nach der Rechnung in  $R_{15}$  abgespeichert – ergibt sich aus  $T_{2,1}$  (in  $R_{15}$ ),  $T_{3,1}$  (in  $R_{16}$ ) und  $T_{2,0}$  (in  $R_{19}$ ). Das  $T_{i,k}$ -Schema wird in den Programmen komplett ausgedruckt, womit sich die Konvergenz des Verfahrens beobachten lässt.



### 3 Erste Anwendung: die numerische Integration

#### 3.1 Das Verfahren

Das bestimmte Integral  $I(f; a, b)$  einer Funktion  $f$  über  $[a, b]$  soll mit einer gewünschten Genauigkeit  $\epsilon$  approximiert werden. Grundlage für die Anwendung der Extrapolation ist die sicherlich vielen bekannte Sehntrapezformel:  $T(h) = h(f(a)/2 + f(a+h) + \dots + \dots + f(b-h) + f(b)/2)$ . Um die Anzahl der Funktionsauswertungen gering zu halten, wurde für die praktische Durchführung die Folge  $(h_0 = b - a)$

$$F = \{h_0, h_0/2, h_0/3, h_0/4, h_0/6, \dots\}$$

$$h_{i-2}/2 \text{ für } i = 3, 4, \dots$$

genommen (Bulirsch-Folge). Label A' im Programm EX-I enthält die Berechnung der  $T(h_i)$ :

$$T(h_i) := T_{i,0} = \frac{1}{2} T_{i-2,0} + h_i \sum_{j=0}^{N_i-2} f(a + (2j+1) h_i),$$

$$i = 3, 4, \dots,$$

$$N_i = h_0/h_i.$$

#### 3.2 Programm EX-I

Programm EX-I erlaubt die Berechnung von bis zu 15 Zeilen und Spalten (bei anfänglicher Speicherbereichsverteilung) im  $T_{i,k}$ -Schema, wobei diese Grenze aufgrund wachsender Rundungsfehlereinflüsse nur eine theoretische ist. Falls eine gewünschte Genauigkeit  $\epsilon$  eingegeben wurde, bricht das Programm die Rechnung ab, wenn für ein  $n \leq m$  gilt:  $|T_{n,n} - T_{n,n-1}| < \epsilon$ , falls  $\epsilon$  nicht erreicht oder eingegeben wurde, berechnet das Programm alle  $m$  Zeilen und Spalten.

#### Programmdurchführung

Anweisung	Eingabe	Befehl	Anzeige
1. Eingabe der Funktion („“ darf verwendet werden)	$f(x)$	B' ... RTN LRN	Betriebsart LEARN
2. Eingabe von $a, b$	$a$ $b$	A R/S	$a$ $b$
3. Eingabe der gewünschten Genauigkeit	$\epsilon$	B	0
4. Eingabe von $m$ , Programmstart	$m$	C	
5. Ergebnisanzeige 5a. Gewünschte Genauigkeit erreicht ( $n \leq m$ ) oder nicht angegeben ( $n = m$ ) 5b. Genauigkeit nicht erreicht			$T_{n,n}$ „ $T_{m,m}$ “

Speicherbelegung:

$R_{00} - R_{09}$ : Zwischenspeicher und Programmzeiger,  
 $R_{10}$ : a,  $R_{11} - R_{13}$ : Zwischenspeicher  
 $R_{14} - R_{14+m}$ :  $T_{m,m} - T_{m,0}$   
 $R_{15+m} - R_{14+2m}$ :  $T_{m,m-1} - T_{m,0}$   
 $R_{15+2m} - R_{14+3m}$ :  $h_0 - h_{m-1}$

} nach Berechnung von  $m$  Zeilen

Mit angeschlossenem Drucker werden die  $T_{i,k}$  zeilenweise ausgedruckt.

### 4 Zweite Anwendung: die Lösung von Anfangswertproblemen bei Differentialgleichungen erster Ordnung

#### 4.1 Das Verfahren

Gesucht ist ein Näherungswert für die exakte Lösung  $y(x)$  des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Basis des Extrapolationsverfahrens ist die modifizierte *Midpoint-rule*: An der Stelle  $x_1$  wird eine Näherung  $Y_1$  für  $y(x_1)$  nach folgender Vorschrift berechnet. Mit  $h = (x_1 - x_0)/N$ ,  $N$  gerade ist

$$z_0 = y_0, z_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$z_{j+1} = z_{j-1} + 2hf(x_0 + jh, z_j), \quad j = 1, \dots, N-1$$

$$S(x_1; h) := 1/2 (z_N + z_{N-1} + hf(x_1, z_N))$$

Folgende Schrittweitenfolge wurde genommen:

$$F = \{H/2, H/4, H/6, H/8, \dots\} \quad H = x_1 - x_0,$$

Mit  $S(x_1, h_i) := T_{i,0}$  wird nun der obige Interpolationsalgorithmus angewendet; die berechnete Näherung  $Y_1 = T_{n,n}$ ,  $n \leq m$  ersetzt nun  $y_0$ ,  $x_1$  ersetzt  $x_0$  für das neue AWP zur Berechnung von  $Y_2$  usw.

#### 4.2 Programm EX-D

Möglichkeiten und Abbruchbedingungen entsprechen dem Programm EX-I, jedoch muß der „Kampf“ gegen wachsende Rundungsfehlereinflüsse bei Berechnung von mehr als vier Zeilen und Spalten als verloren angesehen werden (womit sich in vielen Fällen auch bei großer Grundschriftweite  $H$  10-stellige Genauigkeit erreichen läßt).

Programmdurchführung

Anweisung	Eingabe	Befehl	Anzeige
1. Eingabe der Funktion („=“ darf verwendet werden, $x$ in der Anzeige und $R_{11}$ , $y$ in $R_{10}$ )	$f(x, y)$	B' ... RTN LRN	Betriebsart LEARN
2. Eingabe von $x_0, y_0$	$x_0$ $y_0$	A B	$x_0$ $y_0$
3. Eingabe der gewünschten Genauigkeit	$\epsilon$	C	0
4. Eingabe von $m$ $a_1$ -Zehnerziffer $a_2$ -Einerziffer		D ... ... LRN	Betriebsart LEARN
5. Eingabe der Grundschriftweite $H$ , Programmstart	$H$	E	$x_1$
6. Ergebnisanzeige 6a. Genauigkeit erreicht bzw. nicht angegeben 6b. Genauigkeit nicht erreicht		R/S  R/S	$T_{n,n}$  „ $T_{m,m}$ “
7. Lösung des neuen AWP 7a. Ohne Veränderung der Grundschriftweite $H$ 7b. Mit neuer Schrittweite $H$	$\bar{H}$	R/S  E	$x_2$  $x_2$
8. Weiter mit Schritt 6			

Speicherbelegung:

$R_{00} - R_{09}$ : Zwischenspeicher und Programmzeiger  
 $R_{10}$ :  $y$ ,  $R_{11}$ :  $x$   
 $R_{12} - R_{12+m}$ :  $T_{m,m} - T_{m,0}$   
 $R_{13+m} - R_{12+2m}$ :  $T_{m,m-1} - T_{m,0}$   
 $R_{13+2m} - R_{12+3m}$ :  $h_0 - h_{m-1}$   
 HIR 7:  $x$ , HIR 8:  $y$

} nach Berechnung von  $m$  Zeilen

### 5 Beispiele

Im folgenden wird die Ausgabe des angeschlossenen Druckers PC-100 C dargestellt (diese kann man leicht seinen individuellen Anforderungen anpassen, indem man entsprechende Print- und Adv-Befehle durch Nop ersetzt).

EX-I	EX-I
0.	0.
1.570796327	0.5
5. -08	
6.	4.
.7853981634	.5017904365
0.948059449	.5158987506
1.018362724	0.520779487
7.0303275-02	4.8807364-03
.9770486167	.5184609243
1.001548392	.5205290601
.9999957021	.5204995522
1.5526899-03	2.9507917-05
0.987115801	.5193541352
1.000368252	.5205070815
.999997383	.5204998588
1.000000007	0.520499879
2.68281-07	2.017-08
.9942818883	.5199910284
1.000090109	.5205016687
.999999711	.5204998757
1.	.5204998778
1.	.5204998778
1. -12	1.06-11
1. = I	.5204998778 = I

a) b)  
Fig. 1

EX-II	EX-II
	1.430615088
	1.430280788
	1.430279845
1.	
2.	
5. -08	9.42831-07
0.5	
1.433272664	1.430468596
	1.430280294
1.431033183	1.430280129
1.430288244	1.430280142
7.4493935-04	1.3237-08
	1.5
	1.430280142

Fig. 2

In Fig. 1 ist die Berechnung von Näherungswerten für zwei bestimmte Integrale wiedergegeben:

$$a) \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \quad b) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{0.5} \exp(-x^2) \, dx$$

Für das AWP

$$y' = \frac{1 - xy^3}{x^2 y^2}, \quad x_0 = 1, y_0 = 2$$

zeigt Fig. 2 die Bestimmung einer numerischen Lösung für  $y(1,5)$ . In allen Beispielen macht sich der tatsächliche Fehler nicht in der Anzeige bemerkbar.

**Literatur**

Stoer, J.: Einführung in die numerische Mathematik I, Berlin—Heidelberg—New York 1979.  
 Stoer, J.; Bulirsch, R.: Einführung in die numerische Mathematik II, Berlin—Heidelberg—New York 1973.  
 Grigorieff, R. D.: Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen 1, Stuttgart 1972.