Die Diskussion um den Einsatz von Rechengeräten im Mathematikunterricht ist für das Jahrbuch bereits zur Tradition geworden. In den früheren Ausgaben war die Verwendung nichtprogrammierbarer Taschenrechner ein Schwerpunkt. Aber auch die Benutzung von PTR und Computern in der Sekundarstufe wurde erörtert. Im folgenden Beitrag arbeitet Karl Achilles mit Hilfe der Berechnung von Quadratwurzeln und Zehnerlogarithmen heraus, daß PTR schon in der Sekundarstufe I sinnvoll sind. In zwei nachfolgenden Aufsätzen entwickelt Gunter Alle Gedanken zur Verwendung von Computern im Mathematikunterricht. Auf eine andere Ebene heben Bleymüller und Lamers die Diskussion mit ihrem Erfahrungsbericht zur Statistik-Ausbildung von Studenten der wirtschaftswissenschaften.

Karl Achilles

Möglichkeiten des Einsatzes der PTR TI-57/58/59 in der Sekundarstufe am Beispiel der Intervallschachtelung

1 Allgemeine Bemerkungen

Trotz des starken Preisverfalls haben sich programmierbare Taschenrechner (PTR) an den allgemeinbildenden Schulen bisher noch nicht gebührend durchgesetzt. Einer der Gründe dürfte darin liegen, daß lange Zeit die entsprechende Software fehlte. Unter den an Schulen gebräuchlichen PTR sind die Modelle TI-57/58/59 mit Abstand am häufigsten anzutreffen. Der „kleine" TI-57 findet in der Sekundarstufe I, die „großen" TI-58/59 eher in der Sekundarstufe II Verbreitung.

Für mathematische Probleme des Sekundarbereichs I sind solche Programme besonders wichtig, die auf allen 3 Rechnertypen laufen. Im folgenden werden 2 Programme vorgestellt, die sich mit einem fundamentalen Themenbereich des Unterrichts der Klassen 9 und 10 befassen. Es handelt sich um *Intervallschachtelungsverfahren*, und zwar:

- Heronsches Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel einer positiven Zahl,
- Berechnung von Zehnerlogarithmen.

Die zugehörigen Programmlistings sind für TI-58/59 konzipiert, lassen sich jedoch leicht für den TI-57 umschreiben. Anhand der Programmablaufpläne dürfte eine Programmierung von anderen PTR-Typen oder von Mikrocomputern (CBM, Apple, etc.) nicht allzu schwierig sein.

2 Das Heronsche Verfahren zur Quadratwurzelberechnung

Das Problem, die Quadratwurzel einer positiven Zahl zu berechnen, kann im Unterricht der allgemeinbildenden Schulen nicht schon damit gelöst sein, daß die Wurzeltaste des Taschenrechners gedrückt wird. Vielmehr müssen Schüler ein fundamentales Rechenverfahren kennenlernen, d. h. ein Verfahren, welches zurückgreift auf die Grundrechenarten $+$, $-$, $\times$, $:$. Zur Lösung dieses Problems eignet sich hervorragend das Heronsche Verfahren, nicht nur der guten Konvergenz wegen, sondern auch deshalb, weil sich hier der Begriff „Intervallschachtelung" sinnvoll einführen läßt. Es beruht auf folgenden Überlegungen:

Setzt man als bekannt voraus, daß das arithmetische Mittel zweier positiver Zahlen x, y immer größer als ihr geometrisches Mittel ist, so folgt mit $y = a/x$ sofort die Behauptung

$$\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\text{arith. M.}} > \underbrace{\sqrt{xy}}_{\text{geom. M.}} \Rightarrow \frac{x+a/x}{2} > \sqrt{x \cdot a/x} = \sqrt{a}$$

Fig. 1 Beweis

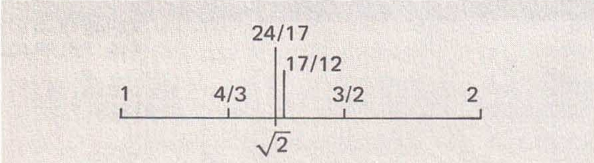

Fig. 2 Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$

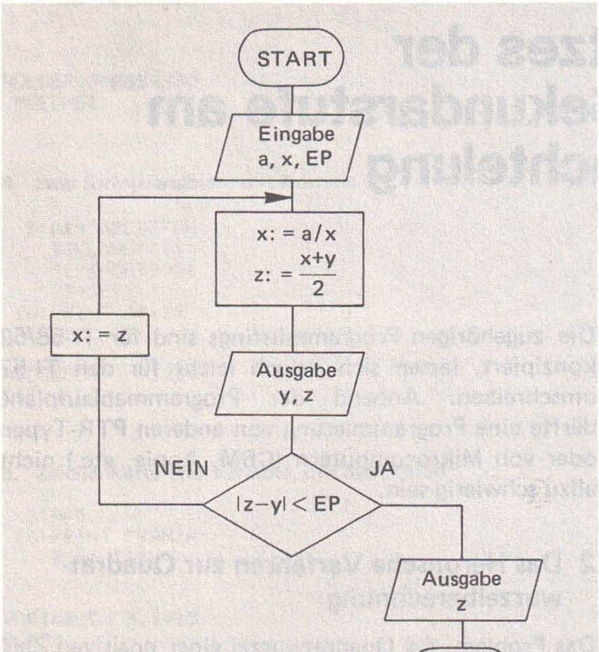

Fig. 3 Quadratwurzel

Gesucht ist die Quadratwurzel einer positiven Zahl a. Gibt man sich einen Näherungswert x vor, der größer als die gesuchte Wurzel ist, so leuchtet ein, daß der Quotient a/x kleiner als die Wurzel sein muß. Das arithmetische Mittel der beiden Zahlen x und a/x ist

HERON'SCHES
VERFAHREN (ΓA)

000	43	RCL	013	55	÷	026	00	00
001	00	00	014	02	2	027	35	35
002	55	÷	015	95	=	028	43	RCL
003	43	RCL	016	42	STO	029	03	03
004	01	01	017	03	03	030	42	STO
005	95	=	018	66	PAU	031	01	01
006	42	STO	019	75	−	032	61	GTO
007	02	02	020	43	RCL	033	00	00
008	66	PAU	021	02	02	034	00	00
009	85	+	022	95	=	035	43	RCL
010	43	RCL	023	50	I×I	036	03	03
011	01	01	024	22	INV	037	91	R/S
012	95	=	025	77	GE	038	00	0

Fig. 4 Programmliste

mit Sicherheit eine bessere Näherung, wobei sich beweisen läßt, daß es immer größer als die Quadratwurzel aus a ist. (**Fig. 1**)

Dividiert man a durch diese bessere Näherung, so erhält man wiederum eine zu kleine Zahl. Das arithmetische Mittel der beiden zuletzt erzeugten Zahlen ist wieder zu groß, jedoch eine bessere Näherung. Offensichtlich bilden die Folgen a/x_i und $(x_i + a/x_i)/2$ eine Intervallschachtelung für die Quadratwurzel aus a. **Fig. 2** veranschaulicht dies.

Den Programmablaufplan (Flußdiagramm) zeigt **Fig. 3.** Das Programm bricht ab, falls die Länge des Intervalls kleiner als EP geworden ist. Somit kann man durch geeignete Wahl von EP die Anzahl der richtigen Stellen schon vorher festlegen. Das Programm (**Fig. 4**) wird folgendermaßen gestartet:

- Radikand a eingeben STO 00 drücken,
- erste Näherung x eingeben STO 01 drücken,
- EP (größer als 0) eingeben x⇄t drücken,
- RST R/S drücken.

Beispiel: $a = 2$, $x = 2$, EP = 0.0000001.
Wurzelnäherung: 1.414213562

3 Berechnung von Zehnerlogarithmen

Die Berechnung von Logarithmen mittels Reihen ist für die Klasse 10 noch verfrüht, da den Schülern nicht einsichtig wird, weshalb sich Logarithmen auf diese Art berechnen lassen. Sinnvoller ist die Anwendung eines Intervallschachtelungsverfahrens, das im folgenden anhand des Beispiels lg3 erläutert wird.

Das Verfahren beschränkt sich auf Zehnerlogarithmen mit Numeri x, wobei $1 < x < 10$. Durch die Beziehung

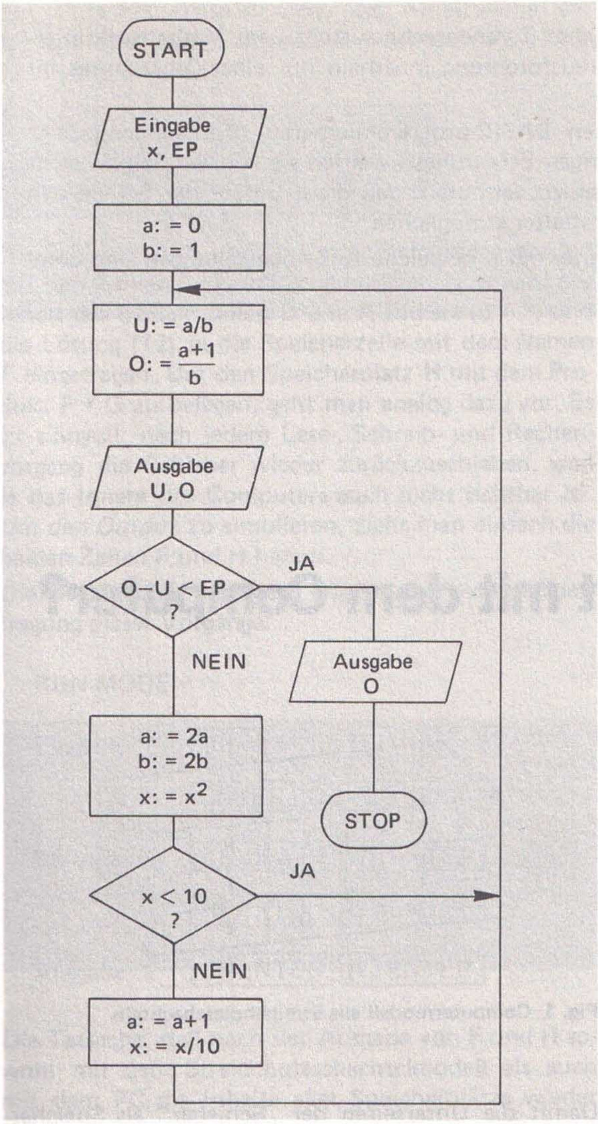

Fig. 5 Logarithmus

$\lg(x \cdot 10^z) = \lg x + z$ können aber auch alle anderen Numeri berücksichtigt werden.

Bekannt seien: $\lg 1 = 0$ und $\lg 10 = 1$.

0. Schritt:	Offensichtlich ist	Durch Logarithmieren folgt
	$10^\circ < 3 < 10^1$	$0 < \lg 3 < 1$
1. Schritt:	Quadriere Numerus	Logarithmiere
	$10^0 < 3^2 < 10^1$	$0 < 2\lg 3 < 1$
		$\frac{0}{2} < \lg 3 < \frac{1}{2}$

```
   INTERVALL-
SCHACHTELUNG FUER
ZEHNERLOGARITHMEN

000  00   0    021  04  04    042  01   1
001  42 STO    022  66 PAU    043  00   0
002  01  01    023  43 RCL    044  32 X:T
003  01   1    024  05  05    045  43 RCL
004  42 STO    025  32 X:T    046  00  00
005  02  02    026  43 RCL    047  22 INV
006  43 RCL    027  02  02    048  77  GE
007  01  01    028  35 1/X    049  00  00
008  55   ÷    029  22 INV    050  06  06
009  43 RCL    030  77  GE    051  01   1
010  02  02    031  00  00    052  44 SUM
011  95   =    032  61  61    053  01  01
012  42 STO    033  02   2    054  32 X:T
013  03  03    034  49 PRD    055  22 INV
014  66 PAU    035  01  01    056  49 PRD
015  85   +    036  49 PRD    057  00  00
016  43 RCL    037  02  02    058  61 GTO
017  02  02    038  43 RCL    059  00  00
018  35 1/X    039  00  00    060  06  06
019  95   =    040  49 PRD    061  43 RCL
020  42 STO    041  00  00    062  04  04
                              063  91 R/S
```

Fig. 6 Programmliste

2. Schritt:	Quadriere Numerus	Logarithmiere
	$10^1 < 3^4 < 10^2$	$1 < 4\lg 3 < 2$
		$\frac{1}{4} < \lg 3 < \frac{2}{4}$
3. Schritt:	Quadriere den 10. Teil des Numerus	Logarithmiere
	$10^1 < \frac{3^8}{10^2} < 10^2$	$1 < 8\lg 3 - 2 < 2$
		$\frac{3}{8} < \lg 3 < \frac{4}{8}$

Um dies verstehen zu können, müssen die Schüler selbstverständlich Logarithmen- und Potenzgesetze beherrschen.

Im Flußdiagramm (**Fig. 5**) ist der dem Verfahren zugrunde liegende Algorithmus nochmals verdeutlicht. Wie beim „Heronschen Verfahren" gibt es auch hier eine Abbruchbedingung durch die Zahl EP, die die Anzahl der gültigen Stellen festlegt.

Das Programm (**Fig. 6**) wird folgendermaßen gestartet:

– EP (größer als 0) eingeben STO 05 drücken,
– Numerus x eingeben STO 00 drücken,
– RST R/S drücken.

Beispiel: EP = 0.0000001, $x = 3$.
Näherungswert: <u>0.4771212935</u>