

Gerhard Frank

Ausgleichspolynom

1 Aufgabenstellung

Das Ausgleichen streuender Beobachtungswerte y_i durch ein Polynom nach der Methode der kleinsten Quadratsumme wird oft in der Technik angewandt (s. auch [3]). Allerdings ist der Rechenaufwand beträchtlich. Ziel ist,

- die Koeffizienten a_k des Ausgleichspolynoms zu bestimmen,
- die Funktionswerte des Ausgleichspolynoms (ausgeglichene Werte \bar{y}) zu berechnen und
- die Fehler zu ermitteln.

In der Technik erfüllen meist Polynome ersten Grades (Gerade) bis fünften Grades die Anforderungen (s. auch [1, 2]).

2 Rechenvorschrift (Algorithmus)

Ein Ausgleichspolynom wird geschrieben,

$$\bar{y}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_kx^{k-1} + \dots = \sum_{k=1}^m a_kx^{k-1}.$$

Die Koeffizienten a_k werden aus der Normalmatrix N und dem Spaltenvektor y^* (y „Stern“) nach der Beziehung,

$$N \cdot a = y^* \quad \text{oder} \quad a = N^{-1} \cdot y^*, \quad (1)$$

berechnet, wobei mit N^{-1} die inverse Normalmatrix bezeichnet wird. N , a und y^* lauten ausgeschrieben:

$$N = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & \dots & \sum x_i^{k-1} \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_i^{k-1} & \sum x_i^k & \dots & \sum x_i^{2(k-1)} \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_k \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$y^* = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \dots \\ \sum y_i x_i^{k-1} \end{bmatrix},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, m \quad \text{und} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

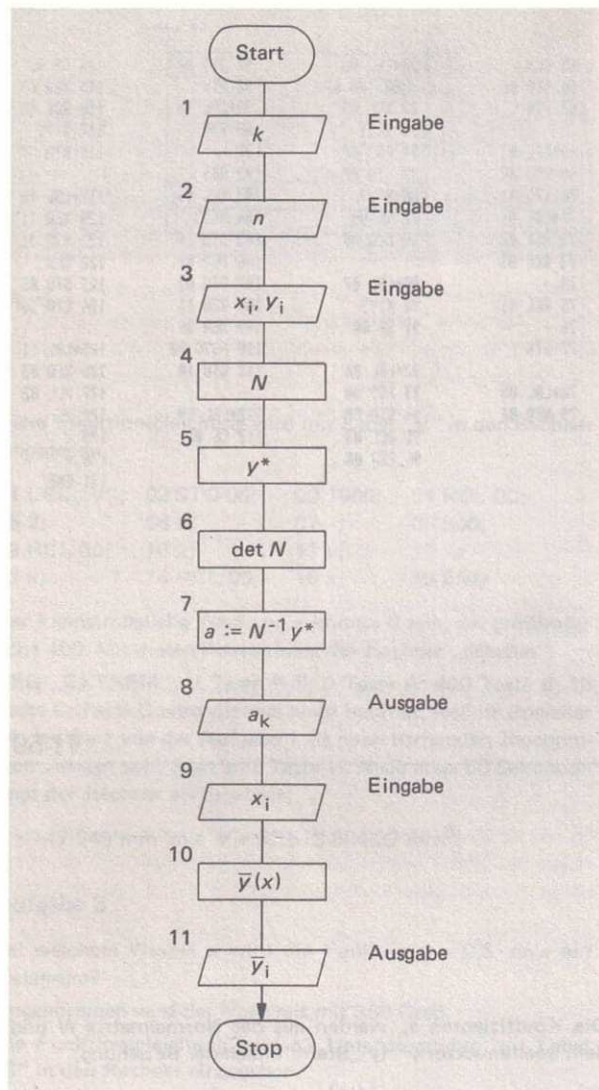


Fig. 1 Programmablaufplan zum Programm AUSPOLY

3 Programmablaufplan

Als Programmkonzeption wird vorgesehen (Fig. 1):

- Eingabe der Eingangsgrößen vor Beginn der eigentlichen Berechnung (Blockfelder 1 bis 3):
 - k Zahl der zu bestimmenden Koeffizienten a_k
 - n Zahl der Wertepaare x_i, y_i
 - x_i, y_i Beobachtungswerte
- Berechnung der a_k nach Gleichung (1) mit Modulprogramm ML-02 „Matrixinversion, Determinanten und Simultangleichungen“ des Moduls 1 (Blockfelder 4 bis 7).

- Berechnung der ausgeglichenen Werte \bar{y} mit Modulprogramm ML-07 „Polynomentwicklung“ des Moduls 1 (Blockfeld 10).

4 Programmbeschreibung

Das Programm (Fig. 2) ist bis $k = 6$ und $n = 25$ anwendbar. Die Berechnung der Potenzen von x_i erfolgt mit Befehl y^x des TI-59. Um auch negative x_i verarbeiten zu können (denn mit y^x können beim TI-59 nur Basen $y \geq 0$ richtig potenziert werden), sind die Unterprogramme D und B' programmiert. Unterprogramm D arbeitet mit indirekter Verzweigung, damit die Elemente von N und y^* mit einem Unterprogramm wie folgt berechnet werden können:

$$\sum y_i x_i^{2(k-1)} \text{ mit } y_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum y_i x_i^{k-1}.$$

Die mit ML-02 berechneten a_k werden gleich in die für ML-07 erforderlichen Datenspeicher abgelegt, so daß nur der Aufruf von Programmsegment C des ML-07 programmiert zu werden braucht. Die übrigen Datenspeicher werden wie folgt belegt:

- R₀₀ bis R₀₈: Programmzeiger, Zwischenergebnisse
- R₁₀ bis R₃₄: x_i
- R₃₅ bis R₅₉: y_i
- R₆₀: n
- R₆₁ bis R₇₀: $\sum x_i$ bis $\sum x_i^{2(k-1)}$
- R₇₁ bis R₇₆: y_k^*

Mit den in R₆₀ bis R₇₆ gespeicherten Elementen werden die a_k berechnet, wobei ML-02 die Datenspeicher:

R₀₈ bis R_{k(k+2)+7}

beansprucht.

Verwendete Marken:

- A Eingabe k
- B Eingabe n
- C Unterprogramm für die Zeiger der x_i, y_i
- D Unterprogramm für $\sum x_i^{2(k-1)}$ und $\sum y_i x_i^{k-1}$
- E Adresse für $\sum x_i^{2(k-1)}$
- A' Unterprogramm zur Eingabe der Elemente von N in ML-02
- B' Bildung von $-|x_i|^{2(k-1)}$ bei $-x_i$ und ungeradem Exponenten, Setzen von Flag 0

5 Benutzeranleitung

Name des Programms:	AUSPOLY
Speicherbereichsverteilung:	319.79
Modul:	1
Anzeigeformat:	beliebig
Drucker:	PC 100 C
Magnetkarten:	1 Magnetkarte, 2 Bahnen für Block 1 und 2 des TI-59 (Tabelle 1)

Bei falscher Eingabe eines Wertes x_i, y_i müssen alle Werte über die Marke B neu eingegeben werden.

000	76	LBL	055	00	00	110	02	02	165	16	A'	220	43	RCL	275	43	RCL
001	11	A	056	00	00	111	00	0	166	36	PGM	221	00	00	276	06	06
002	47	CMS	057	48	48	112	42	STD	167	02	02	222	95	=	277	61	GTD
003	69	DP	058	43	RCL	113	03	03	168	91	R/S	223	42	STD	278	02	02
004	00	00	059	05	05	114	16	A'	169	72	ST*	224	06	06	279	28	28
005	42	STD	060	65	X	115	36	PGM	170	02	02	225	87	IFF	280	76	LBL
006	07	07	061	02	2	116	02	02	171	69	DP	226	00	00	281	16	A'
007	75	-	062	95	=	117	13	C	172	22	22	227	17	B'	282	29	CP
008	01	1	063	42	STD	118	01	1	173	68	NDF	228	74	SM*	283	43	RCL
009	95	=	064	00	00	119	36	PGM	174	97	DSZ	229	03	03	284	07	07
010	42	STD	065	05	5	120	02	02	175	00	00	230	69	DP	285	42	STD
011	05	05	066	08	8	121	14	D	176	01	01	231	21	21	286	00	00
012	02	2	067	85	+	122	07	7	177	66	66	232	69	DP	287	69	DP
013	06	6	068	02	2	123	01	1	178	25	CLR	233	22	22	288	23	23
014	69	DP	069	65	X	124	42	STD	179	91	R/S	234	43	RCL	289	73	RC*
015	04	04	070	43	RCL	125	00	00	180	36	PGM	235	08	08	290	02	02
016	43	RCL	071	07	07	126	73	RC*	181	07	07	236	32	X:T	291	36	PGM
017	07	07	072	95	=	127	00	00	182	13	C	237	43	RCL	292	02	02
018	69	DP	073	42	STD	128	36	PGM	183	61	GTD	238	01	01	293	91	R/S
019	06	06	074	03	03	129	02	02	184	01	01	239	22	INV	294	69	DP
020	02	2	075	02	2	130	91	R/S	185	79	79	240	67	EQ	295	22	22
021	06	6	076	00	0	131	69	DP	186	76	LBL	241	40	IND	296	97	DSZ
022	02	2	077	08	8	132	20	20	187	13	C	242	04	04	297	00	00
023	00	0	078	42	STD	133	07	7	188	01	1	243	69	DP	298	02	02
024	00	0	079	04	04	134	01	1	189	00	0	244	33	33	299	89	89
025	02	2	080	13	C	135	85	+	190	42	STD	245	13	C	300	43	RCL
026	69	DP	081	15	E	136	43	RCL	191	01	01	246	97	DSZ	301	07	07
027	04	04	082	07	7	137	07	07	192	85	+	247	00	00	302	75	-
028	43	RCL	083	00	0	138	95	=	193	43	RCL	248	40	IND	303	01	1
029	05	05	084	85	+	139	32	X:T	194	60	60	249	04	04	304	95	=
030	69	DP	085	43	RCL	140	43	RCL	195	95	=	250	92	RTN	305	22	INV
031	06	06	086	07	07	141	00	00	196	42	STD	251	86	STF	306	44	SUM
032	25	CLR	087	95	=	142	22	INV	197	02	02	252	00	00	307	02	02
033	91	R/S	088	42	STD	143	67	EQ	198	42	STD	253	61	GTD	308	43	RCL
034	76	LBL	089	03	03	144	01	01	199	08	08	254	02	02	309	07	07
035	12	B	090	43	RCL	145	26	26	200	92	RTN	255	18	18	310	32	X:T
036	42	STD	091	05	05	146	25	CLR	201	76	LBL	256	76	LBL	311	43	RCL
037	60	60	092	42	STD	147	36	PGM	202	14	D	257	17	B'	312	03	03
038	65	X	093	00	00	148	02	02	203	73	RC*	258	53	(313	22	INV
039	02	2	094	05	5	149	15	E	204	02	02	259	43	RCL	314	67	EQ
040	95	=	095	22	INV	150	43	RCL	205	65	X	260	00	00	315	02	02
041	42	STD	096	44	SUM	151	07	07	206	76	LBL	261	55	+	316	83	83
042	00	00	097	04	04	152	42	STD	207	15	E	262	02	2	317	92	RTN
043	01	1	098	13	C	153	00	00	208	73	RC*	263	54)	318	00	0
044	00	0	099	14	D	154	75	-	209	01	01	264	22	INV	319	00	0
045	42	STD	100	13	C	155	01	1	210	22	INV	265	59	INT			
046	01	01	101	14	D	156	95	=	211	86	STF	266	67	EQ			
047	25	CLR	102	29	CP	157	42	STD	212	00	00	267	02	02			
048	91	R/S	103	01	1	158	04	04	213	29	CP	268	75	75			
049	99	PRT	104	36	PGM	159	05	5	214	22	INV	269	43	RCL			
050	72	ST*	105	02	02	160	42	STD	215	77	GE	270	06	06			
051	01	01	106	12	B	161	02	02	216	02	02	271	94	+/-			
052	69	DP	107	06	6	162	01	1	217	51	51	272	61	GTD			
053	21	21	108	00	0	163	36	PGM	218	50	I×I	273	02	02			
054	97	DSZ	109	42	STD	164	02	02	219	45	Y×	274	28	28			

Fig. 2 Programmliste des Programms AUSPOLY

6 Anwendungsbeispiel [5]

Folgende $n = 8$ Werte wurden beobachtet (s. **Tabelle 2**):
Ansatz eines Polynoms 5. Grades mit $k = 6$:

$$\bar{y}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + a_6x^5.$$

Ausgabe der a_k :

$$\begin{aligned} a_1 &= -13,68747879 & a_4 &= -2,375688932 \\ a_2 &= 87,99543026 & a_5 &= 6,672155815 \\ a_3 &= -57,1832124 & a_6 &= -0,9476932922 \end{aligned}$$

Das Ausgleichspolynom lautet somit:

$$\bar{y}(x) = -13,6875 + 87,9954x - 57,1832x^2 - 2,3757x^3 + 6,6722x^4 - 0,9477x^5.$$

Ausgeglichene Werte \bar{y} und Fehler siehe **Tabelle 2**.

Tabelle 1 Benutzeranleitung zum Programm AUSPOLY

Schritt	Verfahren	Eingabe	Befehl	Anzeige
1	Speicherbereichs- verteilung ein- stellen		8 Op 17	319.79
2	Magnetkarte ein- lesen, 1. und 2. Bahn	0		1 bzw. 2
3	Eingabe k	k	A	0
4	Eingabe n	n	B	0
5	Eingabe aller x_i , Beginn x_1	x_i	R/S	x_i
6	Eingabe aller y_i , Beginn y_1	y_i	R/S	y_i
7	Ausgabe a_k , Beginn a_1 (Sollen die a_k nur angezeigt werden, so ist R/S auf PSP 173 anstelle NOP zu pro- grammieren.)			a_k
8	Eingabe x_i für \bar{y}_i	x_i	R/S	\bar{y}_i

Tabelle 2 Werte und Ergebnisse zum Anwendungsbeispiel für das Programm AUSPOLY

x	y	\bar{y}	$y - \bar{y}$
0,5	16,15	16,10	0,05
1,0	20,25	20,47	-0,22
1,5	8,60	8,20	0,40
2,0	- 9,20	- 9,00	0,20
2,5	-20,40	-20,10	0,30
3,0	-17,90	-18,30	-0,40
3,5	- 4,80	- 4,60	0,20
4,0	9,00	9,00	0

Literatur

- [1] *Zurmühl, R.:* Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 4. verb. Auflage. Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1963.
- [2] *Ludwig, R.:* Methoden der Fehler- und Ausgleichsrechnung. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 2. Aufl. (Copyright 1969 by Friedr. Vieweg + Sohn GmbH, Braunschweig)
- [3] *Seyffarth, P., Lübeck, I.:* Ausgleich von Meßwerten durch Polynomentwicklung. ZIS-Mitteilungen, Halle/Saale, 20 (1978) 12, S. 1263–1269.
- [4] *Frank, G.:* Bestimmung der Koeffizienten von Linear-kombinationen mit dem programmierbaren Taschenrechner TI-59. Taschenrechner + Mikrocomputer Jahrbuch 1982, Braunschweig/Wiesbaden, Verlag Vieweg, S. 45.
- [5] *Englert, R.:* Nichtlineare Regression. Taschenrechner + Mikrocomputer Jahrbuch 1981, Braunschweig/Wiesbaden, Verlag Vieweg, S. 187–191.