

Gerhard Frank

Fehlerquadratsumme und mittlerer Fehler der Beobachtungswerte

1 Aufgabenstellung

Als Maß für die Güte einer Ausgleichsfunktion und zur Bestimmung des mittleren Fehlers der Beobachtungen y_i einer Linearkombination [2] muß die Fehlerquadratsumme D_{\min} bekannt sein. D_{\min} soll entsprechend der Methode der kleinsten Quadratsumme möglichst klein sein.

2 Rechenvorschrift (Algorithmus)

Die Fehlerquadratsumme wird nach [1] berechnet:

$$D_{\min} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{k=1}^m a_k y_k^*, \quad y_k^* = \sum_{i=1}^n f_k(x_i) y_i \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ und $k = 1, 2, \dots, m$.

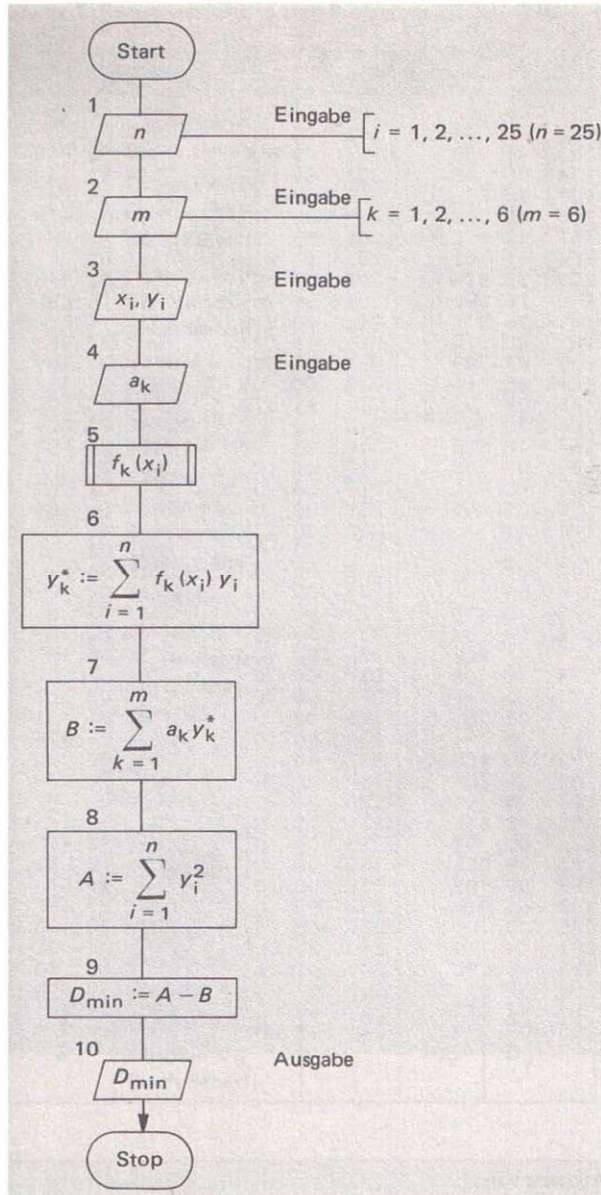


Fig. 1 Programmablaufplan zum Programm FEQUASUM

Von den summierten Quadraten der Beobachtungswerte y_i ist die Summe der Produkte aus den a_k und den summierten Produkten der Funktionswerte $f_k(x_i)$ und der y_i von k Funktionen einer Linearkombination zu subtrahieren. Mit D_{\min} kann dann der mittlere Fehler der y_i bestimmt werden:

$$D_y = \sqrt{\frac{D_{\min}}{n-m}} \quad (2)$$

3 Programmablaufplan

Die Programmkonzeption wird wie folgt formuliert (Fig. 1):

1. Eingabe der Eingangsgrößen n, m, x_i, y_i und a_k am Anfang des Programms (Blockfelder 1 bis 4)
2. Berechnung der Funktionswerte der k Funktionen über Unterprogramme (Blockfeld 5)
3. Berechnung von D_{\min} (Blockfelder 6 bis 10)

4 Programmbeschreibung

Das Programm (Fig. 2) ist bis $n = 25$ Wertepaare, $m = 6$ Koeffizienten anwendbar und ist im Zusammenhang mit [2] und [3] zu sehen. Das Hauptprogramm ist im Block 1 des TI-59 untergebracht, während im Block 2 ab PSP 240 die Unterprogramme der $f_k(x)$ und bei Ausgleichspolynomen ein Unterprogramm zum Potenzieren negativer x_i zu programmieren sind. Der Zugriff auf die Unterprogramme der $f_k(x)$ erfolgt indirekt. Für die Festlegung der Sprungadressen dieser Unterprogramme ist die $f_k(x)$ bestimmend, die die meisten Programmspeicherplätze (PSP) besetzt. Folgende Datenspeicher werden belegt:

R₀₀ bis R₀₉: Programmzeiger, DSZ-Speicher für i, k ,
Speichern von $\sum y_i^2$ und D_{\min}

R₁₀ bis R₃₄: x_i

R₃₅ bis R₅₉: y_i

R₆₀ bis R₆₅: a_k

R₆₆: y_k^*

R₆₇: B

R₆₈: n

R₆₉: m

Verwendete Marken:

A Eingabe x_i, y_i

B Eingabe a_k

C Wiederholen der Berechnung von D_{\min}

D Zeiger für x_i, y_i

E Zeiger für a_k

A' Korrektur der x_i, y_i im Bedarfsfalle

B' Korrektur der a_k im Bedarfsfalle

C' Bildung von $|x_i|$ bei $-x_i$ in Ausgleichspolynomen, Setzen von Flag 0

D' Bildung von $-|x_i|^{k-1}$ in Ausgleichspolynomen

5 Benutzeranleitung

Name des Programms: FEQUASUM

Speicherbereichsverteilung: 479.59 (Programmierte Umstellung auf 399.69)

Modul: nein

Anzeigeformat: beliebig

Drucker: PC-100 C

000	32	X!T	049	67	67	098	57	57	147	04	04	196	85	+	245	92	RTN
001	07	7	050	02	2	099	14	D	148	92	RTN	197	05	5	246	68	NOP
002	69	DP	051	04	4	100	73	RC*	149	76	LBL	198	09	9	247	33	X²
003	17	17	052	00	0	101	04	04	150	15	E	199	95	=	248	92	RTN
004	32	X!T	053	42	STD	102	33	X²	151	06	6	200	42	STD	249	45	YX
005	42	STD	054	06	06	103	44	SUM	152	00	0	201	05	05	250	03	3
006	68	68	055	14	D	104	07	07	153	42	STD	202	43	RCL	251	92	RTN
007	91	R/S	056	15	E	105	69	DP	154	05	05	203	69	69	252	45	YX
008	42	STD	057	25	CLR	106	24	24	155	43	RCL	204	85	+	253	04	4
009	69	69	058	42	STD	107	97	DSZ	156	69	69	205	01	1	254	92	RTN
010	76	LBL	059	66	66	108	00	00	157	42	STD	206	75	-	255	45	YX
011	11	A	060	18	C'	109	01	01	158	01	01	207	43	RCL	256	05	5
012	14	D	061	71	SBR	110	00	00	159	92	RTN	208	09	09	257	92	RTN
013	25	CLR	062	40	IND	111	43	RCL	160	76	LBL	209	95	=	258	76	LBL
014	91	R/S	063	06	06	112	07	07	161	16	A'	210	42	STD	259	18	C'
015	72	ST*	064	19	D'	113	75	-	162	42	STD	211	01	01	260	29	CP
016	03	03	065	65	x	114	43	RCL	163	09	09	212	43	RCL	261	22	INV
017	69	DP	066	73	RC*	115	67	67	164	85	+	213	09	09	262	86	STF
018	23	23	067	04	04	116	95	=	165	09	9	214	61	GTD	263	00	00
019	91	R/S	068	95	=	117	42	STD	166	95	=	215	00	00	264	73	RC*
020	72	ST*	069	44	SUM	118	08	08	167	42	STD	216	32	32	265	03	03
021	04	04	070	66	66	119	99	PRT	168	03	03	217	00	0	266	77	GE
022	69	DP	071	69	DP	120	91	R/S	169	43	RCL	218	00	0	267	02	02
023	24	24	072	23	23	121	55	+	170	09	09	219	00	0	268	84	84
024	97	DSZ	073	69	DP	122	53	(171	85	+	220	00	0	269	43	RCL
025	00	00	074	24	24	123	43	RCL	172	03	3	221	00	0	270	02	02
026	00	00	075	97	DSZ	124	68	68	173	04	4	222	00	0	271	55	+
027	14	14	076	00	00	125	75	-	174	95	=	223	00	0	272	02	2
028	76	LBL	077	00	00	126	43	RCL	175	42	STD	224	00	0	273	95	=
029	12	B	078	60	60	127	69	69	176	04	04	225	00	0	274	22	INV
030	15	E	079	73	RC*	128	54)	177	43	RCL	226	00	0	275	59	INT
031	25	CLR	080	05	05	129	95	=	178	68	68	227	00	0	276	67	EQ
032	91	R/S	081	49	PRD	130	34	FX	179	85	+	228	00	0	277	02	02
033	72	ST*	082	66	66	131	99	PRT	180	01	1	229	00	0	278	81	81
034	05	05	083	43	RCL	132	91	R/S	181	75	-	230	00	0	279	86	STF
035	69	DP	084	66	66	133	81	RST	182	43	RCL	231	00	0	280	00	00
036	25	25	085	44	SUM	134	76	LBL	183	09	09	232	00	0	281	73	RC*
037	97	DSZ	086	67	67	135	14	D	184	95	=	233	00	0	282	03	03
038	01	01	087	14	D	136	43	RCL	185	42	STD	234	00	0	283	50	I×I
039	00	00	088	69	DP	137	68	68	186	00	00	235	00	0	284	92	RTN
040	32	32	089	22	22	138	42	STD	187	43	RCL	236	00	0	285	76	LBL
041	76	LBL	090	69	DP	139	00	00	188	09	09	237	00	0	286	19	D'
042	13	C	091	25	25	140	01	1	189	61	GTD	238	00	0	287	87	IFF
043	25	CLR	092	03	3	141	00	0	190	00	00	239	00	0	288	00	00
044	42	STD	093	44	SUM	142	42	STD	191	14	14	240	25	CLR	289	02	02
045	02	02	094	06	06	143	03	03	192	76	LBL	241	01	1	290	92	92
046	42	STD	095	97	DSZ	144	03	3	193	17	B'	242	92	RTN	291	92	RTN
047	07	07	096	01	01	145	05	5	194	42	STD	243	68	NOP	292	94	+/-
048	42	STD	097	00	00	146	42	STD	195	09	09	244	68	NOP	293	92	RTN

Fig. 2 Programmliste des Programms FEQUASUM

Magnetkarten: 1 Magnetkarte,
 Bahn 1 für das Hauptprogramm
 in Block 1,
 Bahn 2 für Unterprogramme der
 $f_k(x)$ in Block 2

Bei falscher Eingabe eines Wertes x_i , y_i , a_k bestehen Korrekturmöglichkeiten (s. Tabelle 1).

6 Anwendungsbeispiele

6.1 Fehlerquadratsumme und mittlerer Fehler der Beobachtungen eines Ausgleichspolynoms [3]

Das Programm FEQUASUM nach Fig. 2 wird ungeändert angewendet. Entsprechend [3] sind die x_i , y_i , a_k dem Programmablauf zuzuführen.

Ausgabe von

$$D_{\min} = 0,597239217$$

Für die Berechnung des mittleren Fehlers der y_i nach Gleichung (2) können noch freie Programmspeicherplätze belegt werden. Es ergibt sich:

$$D_y = \sqrt{\frac{0,597239217}{8-6}} = 0,546461$$

Tabelle 1 Benutzeranleitung zum Programm FEQUASUM

Schritt	Verfahren	Eingabe	Befehl	Anzeige
1	Magnetkarte in Block 1 einlesen			1.
2	Eingabe n und Starten des Programmablaufs	n	R/S	n
3	Eingabe m und Starten des Programmablaufs	m	R/S	0.
4	Eingabe x_i , Beginn x_1 , Starten des Programmablaufs	x_i	R/S	x_i
5	Eingabe y_i , Beginn y_1 , Starten des Programmablaufs	y_i	R/S	y_i
6	<i>Korrektur:</i> Eingabe i , Taste A', Neueingabe des richtigen Wertes	i	A'	i
	Eingabe a_k , Beginn a_1 , Starten des Programmablaufs	a_k	R/S	a_k
7	<i>Korrektur:</i> Eingabe k , Taste B', Neueingabe des richtigen a_k	k	B'	k
	Ausgabe D_{\min}			D_{\min}
8	Ausgabe D_y (nach Bedarf)		R/S	D_y

6.2 Fehlerquadratsumme und mittlerer Fehler der Beobachtungen für das Beispiel 4.2 aus [2]

Es liegen $n = 8$ Wertepaare und $m = 4$ Koeffizienten vor. Die Funktionen $f_k(x)$ lauten:

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x} \quad f_3(x) = x$$

$$f_2(x) = 1 \quad f_4(x) = x^2$$

Zur Anpassung des Programms FEQUASUM nach Fig. 2 an diese Aufgabe sind folgende Programmveränderungen notwendig:

1. Programmieren von **NOP** anstelle **C'** auf PSP 060
2. Programmieren von **NOP** anstelle **D'** auf PSP 064
3. Programmieren einer **7** anstelle einer **3** auf PSP 092
4. Programmieren der $f_k(x)$ ab PSP 240

Die **7** auf PSP 092 ergibt sich, weil $f_1(x)$ 7 PSP belegt:

PSP 240 bis 246 für $f_1(x)$:

```
1 - RCL Ind 3 = 1/x INV SBR
```

PSP 247 bis 249 für $f_2(x)$:

```
CLR 1 INV SBR
```

PSP 254 bis 256 für $f_3(x)$:

```
RCL IND 3 INV SBR
```

PSP 261 bis 264 für $f_4(x)$:

```
RCL Ind 3 x^2 INV SBR
```

Nach derartiger Veränderung des Programms und Eingabe der x_i, y_i, a_k entsprechend [2] erhält man:

$$D_{\min} = 0,0008924069 \quad D_y = 0,0149366$$

Taschenrechner für Wirtschaft und Finanzen

von Ekbert Hering und Hans-Peter Kicherer

Arbeitsbuch für die Rechner TI-31, TI-41, TI-42 und TI-44. 1980. X, 154 S. 12 X 19,5 cm. Kart. DM 19,80

Das Arbeitsbuch ermöglicht den Benutzern der Taschenrechner TI-31, TI-41, TI-42 und TI-44 ohne spezielle Vorkenntnisse, ihre finanzwirtschaftlichen Problemen schnell und sicher zu bearbeiten.

Verlag Vieweg · Braunschweig / Wiesbaden

Literatur

- [1] *Ludwig, R.*: Methoden der Fehler- und Ausgleichsrechnung. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 2. Auflage, (Copyright 1969 by Friedr. Vieweg + Sohn GmbH, Braunschweig)
- [2] *Frank, G.*: Bestimmung der Koeffizienten von Linearkombinationen mit dem programmierbaren Taschenrechner TI-59. Taschenrechner + Mikrocomputer Jahrbuch 1982, Braunschweig/Wiesbaden, Verlag Vieweg, S. 45
- [3] *Frank, G.*: Ausgleichspolynom. Taschenrechner + Mikrocomputer Jahrbuch 1982, Braunschweig/Wiesbaden, Verlag Vieweg, Programmsammlung, S. 139