

Gerhard Frank

Modifizierte Besselsche Funktionen erster und zweiter Gattung, nullter und erster Ordnung

Berechnung der Funktionswerte, Approximation und technische Anwendung mit dem TI-59

1 Aufgabenstellung

Die modifizierten Besselschen Funktionen erster Gattung $I_n(x)$ und zweiter Gattung $K_n(x)$ (*Macdonaldsche Funktion*) werden bei verschiedenen Aufgabenstellungen in der Physik und Technik zur Lösung von Differentialgleichungen benutzt. Zum Beispiel erforschten japanische Wissenschaftler [1], daß die Einbrandtiefe beim Elektronenstrahlschweißen nach Formel (1) vorausberechnet werden kann. Diese Formel leiteten sie aus einem Differentialgleichungsansatz ab:

$$t = \frac{U I K_0(n) e^{\frac{n K_0(n)}{K_1(n)}}}{26,4 \lambda T} \quad (1)$$

In Formel (1) bedeuten:

- t Einbrandtiefe in cm
- U Beschleunigungsspannung in V
- I Strahlstromstärke in A
- λ Wärmeleitfähigkeit in $\text{cal}/(\text{cm s } ^\circ\text{C})^{-1}$
- T Schmelzpunkt des Werkstoffs in $^\circ\text{C}$

K_0 und K_1 sind die modifizierten Besselschen Funktionen zweiter Gattung, nullter und erster Ordnung. Das Argument n für K_0 und K_1 wird gebildet:

$$n = \frac{v r}{2 \alpha} \quad (2)$$

- v Schweißgeschwindigkeit in cm/s
- α Temperaturleitzahl in cm^2/s
- r Ortskoordinate an der Werkstückoberfläche in cm

Die Formeln (1) und (2) sind Bestandteil eines Algorithmus zum Elektronenstrahlschweißen des japanischen WELDING DATA SYSTEMS. Da uns die Größen v , r und α nicht den Gefallen erweisen, n in Zahlen zu erhalten, deren Funktionswerte K_0 , K_1 sich bequem aus einer Tabelle ablesen lassen,

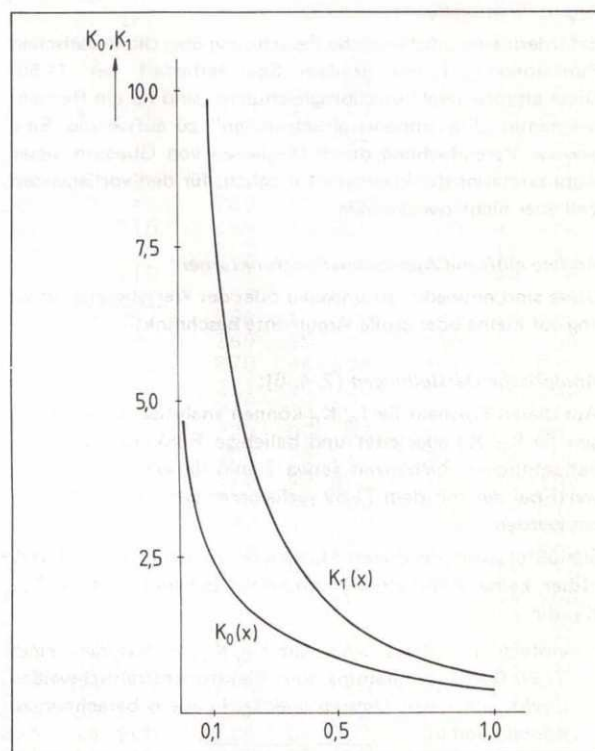


Fig. 1 Kurvenverlauf der Funktionen $K_0(x)$ und $K_1(x)$

sind Tabellen mit der Schrittweite 0,1 [2] für diesen Zweck wenig geeignet. Einige Beispiele für die Argumente n von verschiedenen Werkstoffen, für $v = 0,66 \text{ cm/s}$ und $r = 0,075 \text{ cm}$ enthält **Tabelle 1**. Hinzu kommt noch die Schwierigkeit, daß die Funktionswerte für K_0 und K_1 aufgrund des hyperbolischen Kurvenverlaufs (vgl. Fig. 1) ab $n < 0,5$ sehr anwachsen. Auch sind tabellarische Werte für K_0 und K_1 , die in der Regel interpoliert werden müssen, für ein TI-59-Rechenprogramm

Tabelle 1 Argumente n für verschiedene Werkstoffe

	Stahl	Titan	Kupfer	Aluminium	Aluminium-Legierung
α	0,045	0,068	9,88	0,892	0,458
n	0,550	0,364	0,0025	0,02775	0,054

1) Entsprechend der Originalität der Formel (1) werden anstelle der SI-Einheiten die „alten“ Dimensionen angegeben.

zur Berechnung der Einbrandtiefe beim Elektronenstrahlschweißen nicht brauchbar. Zusammengefaßt bestehen folgende Möglichkeiten einer Bestimmung der Funktionswerte für K_0 und K_1 :

Tabellen [2]:

Haben mit 0,1 für den Anwendungsfall zu große Schrittweiten und enthalten keine Werte für $n < 0,1$.

Approximationsfunktionen [3]:

Erfordern eine umständliche Berechnung über die Besselschen Funktionen I_0, I_1 mit großem Speicherbedarf des TI-59. Diese empirischen Funktionsgleichungen sind für ein Rechenprogramm „Elektronenstrahlschweißen“ zu aufwendig. Eine gewisse Vereinfachung durch Weglassen von Gliedern dieser Approximationsfunktionen ist möglich, für den vorliegenden Fall aber nicht zweckmäßig.

Andere einfache Approximationsfunktionen:

Diese sind entweder zu ungenau oder der Wertebereich ist zu eng auf kleine oder große Argumente beschränkt.

Analytische Darstellungen [2, 4, 6]:

Aus diesen Formeln für I_n, K_n können analytische Darstellungen für K_0, K_1 abgeleitet und beliebige Funktionswerte mit beträchtlicher Rechenzeit (etwa 7 min für einen Funktionswert) bei der mit dem TI-59 verfügbaren Genauigkeit berechnet werden.

Schlußfolgernd aus diesen Möglichkeiten stellt man fest, daß bisher keine empirischen Funktionen bekannt sind für K_0, K_1 , die

- einfach aufgebaut sind, um K_0, K_1 im Rahmen eines TI-59-Rechenprogramms zum Elektronenstrahlschweißen direkt, ohne den Umweg über I_0, I_1 aus n berechnen zu können und
- einen für den eingangs dargelegten Anwendungsfall (und andere technische Fälle) vertretbaren Fehler [5] $\max|v| \leq 5 \cdot 10^{-2}$ haben.

Die Lösung dieser Aufgabenstellung wird im folgenden Punkt beschrieben, wobei mit analytischen Darstellungen nach [2] Werte vor allem im Bereich $n < 0,1$ berechnet werden, die zur Aufstellung einfacher empirischer Funktionsgleichungen dienen.

2 Lösung des Problems

2.1 Analytische Darstellungen nach [2], Programmierung

In [2] ist die modifizierte Besselsche Funktion erster Gattung, n -ter Ordnung, wie folgt angegeben:

$$I_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v! \Gamma(n+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2v+n} \quad (3)$$

Die modifizierte Besselsche Funktion zweiter Gattung, n -ter Ordnung, oder Macdonaldsche Funktion lautet:

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} I_n(x) \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + C\right) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! (n+r)!} (\Phi(r) + \Phi(n+r)) \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \quad (4)$$

$C = 0,5772157$ Eulersche Konstante

$$\Phi(r) = \sum_{s=1}^r \frac{1}{s}, \quad \Phi(0) = 0 \quad (5)$$

Aus diesen Darstellungen sind die Berechnungsformeln für die Funktionen I_0, I_1 und K_0, K_1 zu entwickeln:

$$I_0(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(v!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2v}, \quad \text{denn } \Gamma(v+1) = v! \quad (6)$$

$$I_1(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v! (v+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2v+1}, \quad \text{denn } \Gamma(v+2) = (v+1)! \quad (7)$$

$$K_0(x) = -I_0(x) \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + C\right) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \cdot 2 \sum_{s=1}^r \frac{1}{s} \quad (8)$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} + I_1(x) \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + C\right) - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! (r+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{1+2r} \cdot \left(\sum_{s=1}^r \frac{1}{s} + \sum_{s=0}^r \frac{1}{1+s}\right) \quad (9)$$

Es besteht nun die Aufgabe, entweder einzelne Programme für I_0, I_1, K_0, K_1 aufzustellen, oder ein Programm zu entwerfen, mit dem wahlweise Funktionswerte für I_0, K_0 oder I_1, K_1 für einzelne Argumente x bzw. n oder als Tabelle berechnet werden können. Im TI-59-Programm MODBESS nach Fig. 2 ist die zweite Möglichkeit realisiert:

- Fortlaufende Tabellierung der Funktionswerte für I_0, K_0 oder I_1, K_1 mit programmierbarer Schrittweite H innerhalb eines vorgegebenen Wertebereichs, Schrittweite H , z. B. $H = 0,01$, Wertebereich $A \leq x < B$, z. B. $0,01 \leq x \leq 5,01$ oder
- Berechnung einzelner Funktionswerte sind möglich.
- Anstelle der oberen Summationsgrenze ∞ erfolgt eine Programmverzweigung, wenn der Zuwachs innerhalb der Summenterms der Formeln (6), (7) bzw. (8), (9) Null wird:

$$\Sigma_{(v+1)} - \Sigma_{(v)} = 0, \quad \Sigma_{(r+1)} - \Sigma_{(r)} = 0.$$

000	76	LBL	061	06	06	122	43	RCL	183	07	7	244	08	08	305	04	04
001	16	A'	062	91	R/S	123	06	06	184	54)	245	42	STD	306	87	IFF
002	36	PGM	063	76	LBL	124	42	STD	185	95	=	246	09	09	307	00	00
003	16	16	064	12	B	125	07	07	186	42	STD	247	53	(308	03	03
004	11	A	065	42	STD	126	95	=	187	12	12	248	43	RCL	309	25	25
005	36	PGM	066	15	15	127	52	EE	188	58	FIX	249	09	09	310	43	RCL
006	16	16	067	02	2	128	22	INV	189	40	IND	250	85	+	311	12	12
007	13	C	068	03	3	129	52	EE	190	14	14	251	01	1	312	75	-
008	92	RTN	069	69	DP	130	69	DP	191	25	CLR	252	54)	313	43	RCL
009	76	LBL	070	04	04	131	28	28	192	42	STD	253	35	1/X	314	00	00
010	17	B'	071	43	RCL	132	22	INV	193	08	08	254	44	SUM	315	85	+
011	87	IFF	072	15	15	133	67	EQ	194	87	IFF	255	13	13	316	43	RCL
012	00	00	073	69	DP	134	01	01	195	00	00	256	97	DSZ	317	05	05
013	00	00	074	06	06	135	16	16	196	02	02	257	09	09	318	35	1/X
014	17	17	075	91	R/S	136	22	INV	197	03	03	258	02	02	319	95	=
015	85	+	076	76	LBL	137	58	FIX	198	43	RCL	259	47	47	320	42	STD
016	01	1	077	13	C	138	87	IFF	199	05	05	260	43	RCL	321	00	00
017	54)	078	42	STD	139	00	00	200	55	+	261	13	13	322	61	GTD
018	92	RTN	079	16	16	140	01	01	201	02	2	262	44	SUM	323	03	03
019	76	LBL	080	01	1	141	44	44	202	95	=	263	11	11	324	31	31
020	18	C'	081	04	4	142	01	1	203	42	STD	264	43	RCL	325	43	RCL
021	53	(082	69	DP	143	85	+	204	00	00	265	11	11	326	12	12
022	43	RCL	083	04	04	144	02	2	205	42	STD	266	65	x	327	44	SUM
023	05	05	084	43	RCL	145	04	4	206	07	07	267	43	RCL	328	00	00
024	55	÷	085	16	16	146	00	0	207	69	DP	268	10	10	329	43	RCL
025	02	2	086	69	DP	147	01	1	208	28	28	269	95	=	330	00	00
026	54)	087	06	06	148	95	=	209	43	RCL	270	44	SUM	331	58	FIX
027	45	YX	088	91	R/S	149	69	DP	210	08	08	271	00	00	332	40	IND
028	53	(089	76	LBL	150	04	04	211	42	STD	272	43	RCL	333	14	14
029	43	RCL	090	14	D	151	43	RCL	212	09	09	273	07	07	334	69	DP
030	08	08	091	86	STF	152	06	06	213	18	C'	274	75	-	335	06	06
031	65	x	092	00	00	153	58	FIX	214	42	STD	275	43	RCL	336	22	INV
032	02	2	093	76	LBL	154	40	IND	215	10	10	276	00	00	337	58	FIX
033	17	B'	094	15	E	155	14	14	216	25	CLR	277	42	STD	338	98	ADV
034	55	+	095	42	STD	156	69	DP	217	42	STD	278	07	07	339	43	RCL
035	53	(096	05	05	157	06	06	218	11	11	279	95	=	340	15	15
036	43	RCL	097	04	4	158	22	INV	219	01	1	280	52	EE	341	44	SUM
037	08	08	098	04	4	159	58	FIX	220	42	STD	281	22	INV	342	05	05
038	16	A'	099	69	DP	160	22	INV	221	13	13	282	52	EE	343	43	RCL
039	54)	100	04	04	161	87	IFF	222	43	RCL	283	22	INV	344	16	16
040	55	÷	101	43	RCL	162	00	00	223	09	09	284	67	EQ	345	32	X↑T
041	53	(102	05	05	163	01	01	224	35	1/X	285	02	02	346	43	RCL
042	53	(103	69	DP	164	66	66	225	44	SUM	286	07	07	347	05	05
043	43	RCL	104	06	06	165	94	+/-	226	11	11	287	22	INV	348	22	INV
044	08	08	105	58	FIX	166	65	x	227	97	DSZ	288	58	FIX	349	77	GE
045	17	B'	106	40	IND	167	53	(228	09	09	289	02	2	350	00	00
046	16	A'	107	14	14	168	53	(229	02	02	290	22	INV	351	97	97
047	54)	108	29	CP	169	43	RCL	230	22	22	291	49	PRD	352	22	INV
048	95	=	109	25	CLR	170	05	05	231	22	INV	292	00	00	353	86	STF
049	92	RTN	110	42	STD	171	55	+	232	87	IFF	293	87	IFF	354	00	00
050	76	LBL	111	06	06	172	02	2	233	00	00	294	00	00	355	91	R/S
051	11	A	112	42	STD	173	54)	234	02	02	295	02	02	356	00	0
052	42	STD	113	07	07	174	23	LNx	235	39	39	296	99	99	357	00	0
053	14	14	114	42	STD	175	85	+	236	02	2	297	01	1	358	00	0
054	03	3	115	08	08	176	93	.	237	49	PRD	298	85	+	359	00	0
055	01	1	116	18	C'	177	05	5	238	11	11	299	02	2			
056	69	DP	117	44	SUM	178	07	7	239	87	IFF	300	06	6			
057	04	04	118	06	06	179	07	7	240	00	00	301	00	0			
058	43	RCL	119	43	RCL	180	02	2	241	02	02	302	01	1			
059	14	14	120	07	07	181	01	1	242	64	64	303	95	=			
060	69	DP	121	75	-	182	05	5	243	43	RCL	304	69	DP			

Fig. 2 Aufgelistetes Programm MODBESS

Tabelle 2 Bedienungsanleitung zum Programm MODBESS

Nr.	Anleitung	Eingabe	Tasten	Ausgabe
1	Einlesen Magnetkarte, Bahn 1 und Bahn 2			1. 2.
2	Eingabe Zahl N der Nachkommastellen für Funktionswertberechnung von $I_0, K_0, 1 \leq N \leq 9$	9	A	9
3	Eingabe der oberen Grenze B des Wertebereichs, wobei $B = x$	0,02775	C	0,02775
4	Eingabe der unteren Grenze A des Wertebereichs für $K_0(x)$, Programmstart mit Ausgabe x	0,02775	D	0,02775
5	Ausgabe $I_0(x)$			1,00019 ...
6	Ausgabe $K_0(x)$			3,70135 ...
7	Eingabe Zahl N der Nachkommastellen für Tabellierung von I_0, K_0	7	A	7
8	Eingabe Schrittweite H	0,01	B	0,01
9	Eingabe der oberen Grenze B des Wertebereichs für x, wobei $A \leq x < B$	0,05	C	0,05
10	Eingabe der unteren Grenze A des Wertebereichs für $K_0(x)$, Programmstart mit Ausgabe x	0,01	D	0,01
11	Ausgabe $I_0(x)$			1,00002 ...
12	Ausgabe $K_0(x)$			4,72124 ...
13	Ausgabe $(x + H)$			0,02
14	Ausgabe $I_0(x + H)$			1,00010 ...
15	Ausgabe $K_0(x + H)$ usw.			4,02845 ...
16	Ende der Tabellierung, $x \geq B$			0,05
17	Eingabe Zahl N der Nachkommastellen für Funktionsberechnung von $I_1, K_1, 1 \leq N \leq 9$	9	A	9
18	Eingabe der oberen Grenze $B = x$ des Wertebereichs	0,02775	C	0,02775
19	Eingabe der unteren Grenze $A = x$ des Wertebereichs für $K_1(x)$, Programmstart mit Ausgabe x	0,02775	E	0,02775
20	Ausgabe $I_1(x)$			0,01387 ...
21	Ausgabe $K_1(x)$			35,9777 ...
22	Eingabe N für Tabellierung von I_1, K_1	9	A	9
23	Eingabe H	0,01	B	0,01
24	Eingabe B	0,04	C	0,04
25	Eingabe A für $K_1(x)$, Programmstart mit Ausgabe x	0,01	E	0,01
26	Ausgabe $I_1(x)$			0,00500 ...
27	Ausgabe $K_1(x)$			99,9738 ...
28	Ausgabe $(x + H)$			0,02
29	Ausgabe $I_1(x + H)$			0,01000 ...
30	Ausgabe $K_1(x + H)$			49,9547 ...
31	Ende der Tabellierung, $x \geq B$			0,04

Anmerkungen:

- N = 1 ergibt Fix 1 (eine Nachkommastelle)
- N = 8 ergibt Fix 8 (acht Nachkommastellen)
- N = 9 ergibt INV Fix (10-stellige Anzeige)
- Flag 0 für K_0

Tabelle 3 Datenspeicherbelegung zum Programm MODBESS

Daten- speicher	Belegung
00	$K_0(x), K_1(x)$
01	belegt vom ML-16
02	belegt vom ML-16
03	belegt vom ML-16
04	$r!, (r+1)!, v!, (v+1)!$
05	x
06	$I_0(x), I_1(x)$
07	$\Sigma_{(v+1)}, \Sigma_{(r+1)}$
08	v, r
09	DSZ s
10	$\frac{1}{(r!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \cdot \frac{1}{r! (r+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{(2r+1)}$
11	$\sum \frac{1}{s} \cdot \left(\sum \frac{1}{s} + \sum \frac{1}{s+1}\right)$
12	$-I_0(\ln \frac{x}{2} + C), I_1(\ln \frac{x}{2} + C)$
13	$\sum \frac{1}{s+1}$
14	N (Nachkommastellen, Fix N)
15	H (Schrittweite)
16	B (Obere Grenze des Wertebereichs, $A \leq x < B$)

Tabelle 4 Markenbelegung zum Programm MODBESS

Marke	Belegung
A	N
B	H
C	B
D	A für $K_0(x)$
E	A für $K_1(x)$
A'	Unterprogramm „Fakultät“
B'	Unterprogramm „if flg 0“
C'	Unterprogramm zur Berechnung $\frac{1}{r! (r+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{(2r+1)}$

Durch Einstellung der gewünschten Nachkommastellen (0... 10) und indirekte Formatbildung der Anzeige können die Funktionswerte I_0, K_0, I_1, K_1 innerhalb dieser Formate genau berechnet werden. Dabei verlängert sich die Rechenzeit mit größer werdendem x (vgl. hierzu den Anstieg der Kurven K_0 und K_1 in Fig. 1). Beispielsweise verstreichen für die K_0 -Tabellierung von 0,01 bis 5,00 insgesamt etwa 35 Stunden, für die K_1 -Tabellierung im gleichen Wertebereich 40 Stunden.

- Die Fakultäten werden mit Programmsegment C des Modulprogrammes ML-16 vom Modul 1 ermittelt.

```

          9.  N
    0.02775  B
    0.02775  X
  1.000192525  IO
  3.701355878  KO

          7.  N
    0.01      H
    0.05      B
    0.01      X
  1.0000250  IO
  4.7212447  KO

          0.02  X
  1.0001000  IO
  4.0284573  KO

          0.03  X
  1.0002250  IO
  3.6235295  KO

          0.04  X
  1.0004000  IO
  3.3365414  KO
    
```

Fig. 3 Berechnungsbeispiel mit Programm MODBESS für I_0, K_0

```

          9.  N
    0.02775  B
    0.02775  X
  .0138763356  I1
  35.97774817  K1

          9.  N
    0.01      H
    0.04      B
    0.01      X
  .0050000625  I1
  99.97389412  K1

          0.02  X
    0.0100005  I1
  49.95471782  K1

          0.03  X
  .0150016876  I1
  33.27148777  K1
    
```

Fig. 4 Berechnungsbeispiel mit Programm MODBESS für I_1, K_1

Bedienungsanleitung zum Programm MODBESS siehe **Tabelle 2**, Datenspeicher- und Markenbelegung siehe **Tabelle 3** und **4**. Beispiele für 7 und 9 Nachkommastellen, Wertebereich $0,01 \leq x < 0,05$ bzw. 0,04 und Schrittweite 0,01 für I_0, K_0, I_1, K_1 sind in **Fig. 3** und **Fig. 4** zu sehen. Damit ist die erste Etappe zur Lösung des Problems, nämlich die Bereitstellung von Werten vor allem im Bereich des steilen Anstiegs der Kurven für K_0, K_1 erreicht. Es kann nun der nächste Schritt zur Aufstellung empirischer Funktionsgleichungen für K_0, K_1 folgen.

2.2 Funktionsgleichungen für K_0

Für die Approximation von K_0 werden verschiedene Ansätze untersucht:

$$K_0(x) = \frac{1}{x(a_1 + a_2x)} \tag{10}$$

$$K_0(x) = a_1 x^{a_2} \tag{11}$$

$$K_0(x) = a_1 (e^{2x} - 1)^{a_2} \text{ aus } y = \coth x - 1 \tag{12}$$

$$K_0(x) = a_1 + a_2 x^2 + a_3 \ln x + a_4 x^2 \ln x \tag{13}$$

Die Ansätze (10) bis (12) erweisen sich als unbrauchbar, da die Fehler das geforderte Maß übersteigen. Ansatz (13) bringt das gewünschte Ergebnis, für den mit Programm LINKOMB mit 11 Wertepaaren folgende Koeffizienten berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0,158182 & a_3 &= -0,989674 \\
 a_2 &= 0,23855 & a_4 &= -0,117259.
 \end{aligned}$$

Die Linearkombination (13) ergibt im Wertebereich

$$0,005 \leq x \leq 4$$

einen mittleren Fehler [5]

$$m = 0,013$$

und einen maximalen Fehler

$$\max/v/ = 0,024 \text{ bei } x = 1.$$

Der Fehler bewegt sich also im Bereich

$$0,013 \leq R \leq 0,024.$$

Für diese Untersuchungen werden die TI-59-Programme AUSPOLY²⁾, LINKOMB²⁾ und die Statistikfunktionen des TI-59 eingesetzt.

2.3 Funktionsgleichungen für K₁

2.3.1 GAUSS-Approximation

Zur Aufstellung einer empirischen Funktionsgleichung für K₁ werden folgende Ansätze mit Programm AUSPOLY geprüft:

$$K_1(x) = a_1 + a_2 \frac{1}{x} \tag{14}$$

$$K_1(x) = a_1 + a_2 \frac{1}{x} + a_3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{15}$$

$$K_1(x) = a_1 + a_2 \frac{1}{x} + a_3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + a_4 \left(\frac{1}{x}\right)^3 \tag{16}$$

$$K_1(x) = a_1 + a_2 \frac{1}{x} + a_3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + a_4 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + a_5 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + a_6 \left(\frac{1}{x}\right)^5 \tag{17}$$

Bei der Untersuchung dieser Ansätze zeigt sich, daß sich die Genauigkeit vom Ansatz (14) zum Ansatz (16) verbessert, während Ansatz (17) (größerer Rechenaufwand für die Berechnung der Funktionswerte) keine nennenswerte Verbesserung der Genauigkeit bringt³⁾, so daß sich die Aufmerksamkeit auf Ansatz (16) konzentriert. Die Koeffizienten dieses Polynoms, mit 20 Wertepaaren über Programm AUSPOLY berechnet, lauten:

$$\begin{aligned} a_1 &= -0,3477086178 & a_3 &= -0,000433131 \\ a_2 &= 1,020978022 & a_4 &= 0,000002556 \end{aligned}$$

Mit dem Polynom (16) erzielt man im Wertebereich

$$0,01 \leq x \leq 2$$

einen mittleren Fehler

$$m = 0,037$$

und erhält den maximalen Fehler

$$\max/v/ = 0,071 \text{ bei } x = 1.$$

Der Fehlerbereich beträgt also

$$0,037 \leq R \leq 0,071. \tag{18}$$

2) Siehe Taschenrechner und Mikrocomputer Jahrbuch 1982.
3) Hier zeigt sich, daß ein Polynom höheren Grades nicht unbedingt die Genauigkeit verbessert!

Um den maximalen Fehler mit 0,071 noch etwas zu senken, besteht noch die Möglichkeit, das nach GAUSS approximierte Polynom (16) gleichmäßig nach TSCHEBYSCHJEFF auszugleichen.

2.3.2 TSCHEBYSCHJEFF-Approximation

Das betragsgrößte Residuum R nach Tschebyscheff [7] ist im Bereich (18) zu erwarten. Das gleichmäßige Ausgleichen nach Tschebyscheff wird mit Programm TSCHAPROX 2⁴⁾ vorgenommen. Nach 8 Referenzen [7] beträgt der maximale Fehler des nach Tschebyscheff gleichmäßig ausgeglichenen Polynoms nur noch

$$R = 0,041.$$

Die Koeffizienten dieses optimalen Polynoms sind:

$$\begin{aligned} a_1 &= -0,383026 & a_3 &= -0,000597485 \\ a_2 &= 1,026503 & a_4 &= 0,0000037225 \end{aligned}$$

Abschließend zu dieser Approximationsaufgabe sei vom Verfasser bemerkt, daß bei derartigen Aufgabenstellungen Kenntnisse über Kurvenverläufe der wichtigsten mathematischen Funktionen, über Kombinationen derselben und Ausdauer zu befriedigenden Ergebnissen führen.

3 Anwendung

Zum Ausgangspunkt der Betrachtung zurückkehrend, liegen also eine nach GAUSS approximierte Linearkombination für K₀ und ein TSCHEBYSCHJEFF-Polynom für K₁ vor:

$$\begin{aligned} K_0(x) &= 0,158182 + 0,23855 x^2 - 0,989674 \ln x - \\ &\quad - 0,117259 x^2 \ln x \tag{19} \\ &0 < x \leq 4, \quad \max/v/ = 2,4 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1(x) &= -0,383026 + 1,026503 \frac{1}{x} - 5,97485 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \\ &\quad + 3,7225 \cdot 10^{-6} \left(\frac{1}{x}\right)^3 \tag{20} \\ &0 < x \leq 2, \quad \max/v/ = \max/r/ = 4,1 \cdot 10^{-2}, \end{aligned}$$

mit denen die eingangs dargelegte Berechnung der Einbrandtiefe t beim Elektronenstrahlschweißen unkompliziert bewältigt werden kann:

Eine Elektronenstrahlschweißnaht an einem Aluminiumblech mit s = 20 mm Dicke soll mit folgenden Schweißdaten ausgeführt werden. Wie die Blechdicke vollständig durchgeschweißt?

$$\begin{aligned} U &= 150000 \text{ V} & \lambda &= 0,53 \text{ cal}/(\text{cm s } ^\circ\text{C}) \\ I &= 0,03 \text{ A} & v &= 0,66 \text{ cm/s} \\ \alpha &= 0,892 \text{ cm}^2/\text{s} & T &= 660 \text{ }^\circ\text{C} \\ r &= 0,075 \text{ cm} \end{aligned}$$

4) Vom Verfasser entwickeltes TI-59-Programm zum gleichmäßigen Ausgleichen nach TSCHEBYSCHJEFF, im Band „Ausgleichsrechnung“ der Reihe „Anwendung programmierbarer Taschenrechner“ des Verlages Vieweg enthalten.

$$(1) n = \frac{v r}{2 \alpha} = \frac{0,66 \cdot 0,075}{2 \cdot 0,892} = 0,02775$$

$$(2) K_0(n) = 3,71 \text{ nach (19)}$$

$$(3) K_1(n) = 36,01 \text{ nach (20)}$$

$$(4) t = \frac{U I K_0(n) e^{\frac{n}{K_1(n)} K_0(n)}}{26,4 \lambda T}$$

$$t = \frac{150000 \cdot 0,03 \cdot 3,71 \cdot e^{\frac{0,02775 \cdot 3,71}{36,01}}}{26,4 \cdot 0,53 \cdot 660}$$

$$t = 1,81 \text{ cm} = 18,1 \text{ mm} < s = 20 \text{ mm.}$$

Das Aluminiumblech wird mit den vorgesehenen Schweißdaten *nicht* durchgeschweißt. Um beispielsweise in einer vorgesehenen Schweißfertigung von Flugzeugteilen mit dem Elektronenstrahlschweißen Ausschuß zu vermeiden, sind die Schweißdaten so zu ändern, daß $t > s$ wird, so daß der Blechdickenquerschnitt vollständig erfaßt wird.

Literatur

- [1] *I. Masumoto, J. Takao, M. Kutsuna*: Berechnung der Einbrandtiefe beim Elektronenstrahlschweißen. ZIS-Mitt., Halle/Saale, 20 (1978), H. 12, S. 1197–1209.
- [2] *I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew*: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig: Teubner, 1981, 20. Auflage, S. 64/65 und S. 493/494.
- [3] *M. Abramowitz, I. A. Stegun* (ed.): Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [4] *N. Sieber, H.-J. Sebastian*: Spezielle Funktionen. Leipzig: Teubner, 1977.
- [5] *H. Schumny*: Taschenrechner Handbuch. Leipzig: Teubner, 1978.
- [6] *H.-J. Schell*: Unendliche Reihen. Leipzig: Teubner, 1980, S. 75.
- [7] *R. Ludwig*: Methoden der Fehler- und Ausgleichsrechnung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1971.