

Werner Rudolf

## Berechnung komplexer Funktionen

In der Elektrotechnik besteht häufig die Notwendigkeit, zur Charakterisierung des Übertragungsverhaltens von Zwei- oder Vierpolen komplexe Übertragungsfunktionen nach Betrag und Phase zu berechnen. Insbesondere in der Nachrichten- und Regelungstechnik stößt man dabei nicht selten auf Strukturen, die dem Anwender elektronischer Taschenrechner erheblichen Programmieraufwand bereiten. Um den Besitzern eines TI-58/59 diese Aufgabe zu erleichtern, wird nachfolgend ein Programm vorgestellt, das auf die in der Elektrotechnik gebräuchlichen Strukturen komplexer Funktionen zugeschnitten ist.

Das Programm besteht aus mehreren, voneinander unabhängigen Modulen, die je nach Struktur der komplexen Funktion vom Hauptprogramm aufgerufen werden. Da diese Unterprogramme 298 Programmschritte beanspruchen, kann es auch auf dem TI-58 programmiert werden. Bei der Speicherbereichsverteilung 399.09 stehen dann noch 100 Programmschritte für das Hauptprogramm zur Verfügung, was selbst für sehr umfangreiche Funktionsterme ausreichen ist.

Die folgende Aufstellung gibt einen Überblick über Strukturen komplexer Funktionen, die mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Bausteine mit relativ wenig Aufwand programmiert werden können.

$$(I) \quad F_{I}(j\omega) = \frac{(1 + T'_1 j\omega)(1 + T'_2 j\omega) \dots (1 + T'_n j\omega)}{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega) \dots (1 + T_n j\omega)}$$

$$(II) \quad F_{II}(j\omega) = K \cdot (j\omega)^m \cdot F(j\omega)$$

$$(III) \quad F_{III}(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)}$$

$\omega$  =  $2\pi f$  = Kreisfrequenz

$T'_i$  = Zeitkonstante des i-ten Faktors im Zählerpolynom

$T_i$  = Zeitkonstante des i-ten Faktors im Nennerpolynom

$K$  = reeller Faktor

$m$  =  $\mp 1$ ;  $\mp 2$ ;  $\mp 3 \dots$

$F(j\omega)$  = allgemein komplexe Funktion, deren Parameter auf Grund bereits durchgeführter Operationen im Rechner gespeichert sind.

Auf der Grundlage der vorhandenen Unterprogramme können nun auch relativ komplizierte Übertragungsfunktionen, die sich als Kombination obiger Funktionsterme formulieren lassen, programmiert werden. Der Anwender definiert die komplexe Funktion, indem er sie im Hauptprogramm unter Zuhilfenahme der vorhandenen Moduln bausteinweise zusammensetzt. Zur Ausführung der einem Modul zugeordneten Operation muß lediglich zu dem zugehörigen Label verzweigt werden, was im Hauptprogramm nur einen einzigen Programmschritt erfordert. Ist das Hauptprogramm gespeichert, so ermittelt der Rechner nach Eingabe eines  $\omega$ -Wertes Betrag und Phase der komplexen Funktion.  $|F(j\omega)|/dB$  befindet sich danach im X-Register und  $\angle F(j\omega)$  im t-Register.

Die Adressen der Unterprogramme und die jeweils zugeordneten Operationen des Rechners können den Flußdiagrammen entnommen werden.

**Beschreibung der Unterprogramme im einzelnen**

**Zu A':** Wenn aus einem im X-Register gespeicherten  $\omega$ -Wert  $|F(j\omega)|/dB$  und  $\angle F(j\omega)$  berechnet werden soll, beginnt das Hauptprogramm stets mit einer Verzweigung zu A'. Wie aus dem Flußdiagramm zu entnehmen ist, dient dieses Unterprogramm der Programmvorbereitung. Dazu gehört:

- a) Löschen sämtlicher Register
- b) Speichern von  $\omega$  in Register 00
- c) Umschaltung in den Winkelmodus „Dezimalgrad“
- d) Initialisieren von  $F(j\omega)$  mit 1.

Befehlsfolge im Hauptprogr.	Erläuterungen
300 [2nd] [Lbl]	Beginn des Hauptprogr.
301 [A]	bei Label A
302 [2nd] [A']	Verzweigung zu A'

**Zu B':** Soll die Operation  $F(j\omega) := j\omega \cdot F(j\omega)$  durchgeführt werden, so steht dafür im Hauptprogramm der Befehl [2nd] [B']

Befehlsfolge im HP	Erläuterungen
n - 1 :	Operation vorher
n [2nd] [B']	Verzweigung zu B'
n + 1 :	Operation nachher

**Zu B:** Entsprechendes gilt auch für die Operation  $F(j\omega) := \frac{1}{j\omega} \cdot F(j\omega)$   
Anstelle [2nd] [B'] steht hier [B] im Hauptprogramm.

**Zu C:** Multiplikation mit reellem Faktor K gemäß  $F(j\omega) := K \cdot F(j\omega)$

Befehlsfolge im HP	Erläuterungen
n - 1 :	
n [Kn]	letzte Stelle von K
n [C]	Verzweigung zu C
n + 1 :	Operation nachher

**Zu D':** Multiplikation mit dem Faktor  $(1 + T'_i j\omega)$  gemäß  $F(j\omega) := (1 + T'_i j\omega) \cdot F(j\omega)$

Befehlsfolge im HP	Erläuterungen
n - 1 :	
n [T'in]	letzte Stelle von T' <sub>i</sub>
n [2nd] [D']	Verzweigung zu D'
n + 1 :	Operation nachher

**Zu D:** Entsprechendes gilt für die Operation  $F(j\omega) := \frac{F(j\omega)}{(1 + T_i j\omega)}$

Anstelle des Befehls [2nd] [D'] steht hier [D] im HP.

**Zu E:** Damit am Ende eines Hauptprogramms  $|F(j\omega)|/dB$  und  $\angle F(j\omega)$  berechnet und angezeigt werden kann, muß eine Verzweigung zu E erfolgen.

Befehlsfolge im HP	Erläuterungen
n - 1 :	
n [E]	Operation vorher
n + 1 :	Verzweigung zu E
n + 2 :	Operation nachher

**Zu E':** Die vor allem in der Regelungstechnik häufig auftretende Operation  $F(j\omega) := \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)}$  kann durch einen Sprung zu E' realisiert werden.

Zu beachten ist hierbei, daß vor dieser Verzweigung zuerst Betrag und Phase von  $F(j\omega)$  berechnet werden muß, d. h. dem Befehl [2nd] [E'] ist [E] voranzustellen.

Befehlsfolge im HP	Erläuterungen
n - 1 :	
n [E]	Operation vorher
n + 1 [2nd] [E']	Vorbereitung für E'
n + 2 [E']	Verzweigung zu E'
n + 3 :	Operation nachher

Soll das Hauptprogramm nach dieser Operation abgeschlossen werden, so muß zur Anzeige von  $|F(j\omega)|/\text{dB}$  bzw.  $\angle F(j\omega)$  hier nicht mehr  $\boxed{E}$  nachgestellt werden. Wird dennoch die Befehlsfolge  $\boxed{E} - \boxed{2nd} \boxed{E'} - \boxed{E}$  programmiert, so entsteht dadurch kein Fehler.

**Zu C':** Dieses Modul dient zur Ausführung der Operation  $F(j\omega) := \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)}$ , wenn als Eingabeparameter  $|F(j\omega)|^*$  (im X-Register) und  $\angle F(j\omega)$  (im t-Register) bereitstehen. Es ersetzt somit das in der Regelungstechnik gebräuchliche Nichols-Diagramm.

Für den Einsatz dieses Moduls ist keine Programmvorbereitung mittels Unterprogramm A' erforderlich. Ferner muß zur Anzeige des Ergebnisses entsprechend E' nicht der Befehl E nachgestellt werden.

**Beispiel zu C'**

Sollen außer der hier zugrunde liegenden Operation keine weiteren Berechnungen durchgeführt werden, so besteht das gesamte Hauptprogramm aus den folgenden 4 Befehlen:

Eingabeparameter:  $|F(j\omega)|$  im X-Register  
 $\angle F(j\omega)$  im t-Register

Befehlsfolge	Erläuterungen
300 $\boxed{2nd} \boxed{Lbl}$	Beginn des Hauptprogramms
301 $\boxed{A}$	bei Label A
302 $\boxed{2nd} \boxed{C'}$	Verzweigung zu C'
303 $\boxed{R/S}$	Ende des HP – Anzeige des Ergebnisses (X: $ F(j\omega) /\text{dB}$ , t: $\angle F(j\omega)$ )

**Beispiel zum Hauptprogramm**

Zu programmierende Funktion:

$$F(j\omega) = K_1 \cdot \frac{(1 + T'_v j\omega)}{j\omega} \cdot \frac{K_2 \cdot (1 + T_1 j\omega) (1 + T_2 j\omega)}{1 + K_2 \cdot \frac{(1 + T_1 j\omega)}{(1 + T_1 j\omega) (1 + T_2 j\omega)}}$$

$$F_1(j\omega) = K_2 \cdot \frac{(1 + T_1 j\omega)}{(1 + T_1 j\omega) (1 + T_2 j\omega)}$$

mit  $K_1 = 2,4 \text{ s}^{-1}$      $T_1 = 4 \text{ s}$   
 $K_2 = 3$              $T_2 = 8 \text{ s}$   
 $T'_1 = 0,239 \text{ s}$      $T'_v = 9 \text{ s}$

Hauptprogramm	Erläuterungen
300 $\boxed{2nd} \boxed{Lbl}$	Beginn des Hauptprogramms
301 $\boxed{A}$	bei Label A

\*) Eine eventuelle Umrechnung  $|F(j\omega)|/\text{dB} \rightarrow |F(j\omega)|$  muß im HP erfolgen.

302 $\boxed{2nd} \boxed{A'}$	Programmvorbereitung
303 $\boxed{,}$	$T'_1 \rightarrow$ X-Register
304 $\boxed{2}$	– " –
305 $\boxed{3}$	– " –
306 $\boxed{9}$	– " –
307 $\boxed{2nd} \boxed{D'}$	Eingabe von $(1 + T'_1 j\omega)$
308 $\boxed{4}$	$T_1 \rightarrow$ X-Register
309 $\boxed{D}$	Eingabe $1/(1 + T_1 j\omega)$
310 $\boxed{8}$	$T_2 \rightarrow$ X-Register
311 $\boxed{D}$	Eingabe $1/(1 + T_2 j\omega)$
312 $\boxed{3}$	$K_2 \rightarrow$ X-Register
313 $\boxed{C}$	Eingabe von $K_2$
314 $\boxed{E}$	$\triangle$ Vorbereitung für E'
315 $\boxed{2nd} \boxed{E'}$	Operation E':
	$F(j\omega) := \frac{F(j\omega)}{(1 + F(j\omega))}$
316 $\boxed{9}$	$T'_v \rightarrow$ X-Register
317 $\boxed{2nd} \boxed{D'}$	Eingabe $(1 + T'_v j\omega)$
318 $\boxed{B}$	Eingabe $1/j\omega$
319 $\boxed{2}$	$K_1 \rightarrow$ X-Register
320 $\boxed{,}$	– " –
321 $\boxed{4}$	– " –
322 $\boxed{C}$	Eingabe $K_1$
323 $\boxed{E}$	Berechnung $ F(j\omega) /\text{dB}$ ; $\angle F(j\omega)$
324 $\boxed{R/S}$	Ende des Hauptprogramms

Ergebnis: X-Register:  $\frac{|F(j\omega)|}{\text{dB}}$ ; t-Register  $\angle F(j\omega)$

z. B.  $\omega = 1,16 \text{ s}^{-1} \rightarrow \boxed{A} \rightarrow |F(j\omega)| = 4,179 \text{ dB}; \angle F(j\omega) = -149,3^\circ$ .

**Anmerkungen zum Beispiel:**

Die Reihenfolge, in der die Parameter  $T'_1, T_1, T_2, K_2$  eingegeben werden, spielt keine Rolle. Das gleiche gilt für  $T'_v, K_1$ , Operation  $1/j\omega$ .

Wenn neben Betrag und Phase der komplexen Funktion auch deren Real- und Imaginärteil angezeigt werden soll, so ist dies durch Ausgabe der Registerinhalte R04 und R05 möglich. Nach Ausführung der Operation E enthält R04 stets den Realteil  $\text{Re}\{F(j\omega)\}$  und R05 den Imaginärteil  $\text{Im}\{F(j\omega)\}$ .

Deshalb folgender Ergänzungsvorschlag:

323 $\boxed{E}$	
324 $\boxed{R/S}$	Anzeige von $ F(j\omega) /\text{dB}$ u. $\angle F(j\omega)$
325 $\boxed{RCL}$	$\text{Im}\{F(j\omega)\} \rightarrow$ t-Register



326	<input type="button" value="05"/>	- " -
327	<input type="button" value="x ⇌ t"/>	- " -
328	<input type="button" value="RCL"/>	Re {F(jω)} → X-Register
329	<input type="button" value="04"/>	- " -
330	<input type="button" value="R/S"/>	Anzeige von Re {F(jω)} u. Im {F(jω)}

Nach einem weiteren Programmstart (bei Programmschritt 324) befindet sich Re {F(jω)} im X-Register und Im {F(jω)} im t-Register.

**Anzeige von Zwischenergebnissen**

Das Hauptprogramm kann an beliebiger Stelle zum Zwecke der Anzeige von Zwischenergebnissen unterbrochen werden, ohne daß sich daraus Konsequenzen für nachfolgende Operationen ergeben.

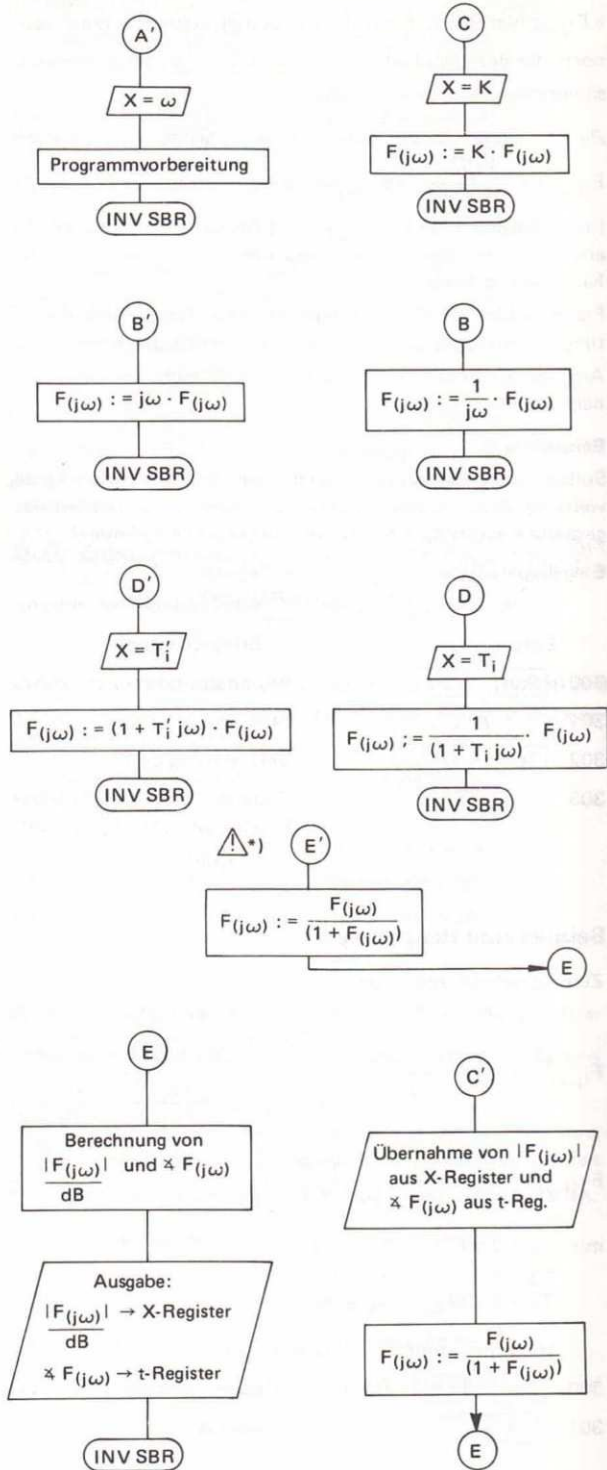
Soll beispielsweise |F<sub>1</sub>(jω)|/dB und ∓ F<sub>1</sub>(jω) angezeigt werden, so wäre das Hauptprogramm wie folgt abzuändern:

313	<input type="button" value="C"/>	Eingabe von K <sub>2</sub>
314	<input type="button" value="E"/>	Berechnung von  F <sub>1</sub> (jω) /dB u. ∓ F <sub>1</sub> (jω) gleichzeitig Vorbereitung für E'
315	<input type="button" value="R/S"/>	Anzeige von  F <sub>1</sub> (jω) /dB u. ∓ F <sub>1</sub> (jω)
316	<input type="button" value="2nd"/> <input type="button" value="E'"/>	Fortsetzung gemäß Beispiel
317	:	- " -
325	<input type="button" value="R/S"/>	Ende des Hauptprogramms

**Registerbelegung:**

- 00 ω
  - 01 belegt
  - 02 belegt
  - 03 frei
  - 04 Re {F(jω)}
  - 05 Im {F(jω)}
  - 06 frei
  - 07 belegt
  - 08 belegt
  - 09 belegt
- } Nach Durchlauf von E

**Flußdiagramm**



\*) Vor Abprung zu E' muß E durchlaufen werden!

Anweisungsliste

000	76	LBL	050	43	RCL	100	42	STD	150	65	*	200	55	+	249	53	(	
001	16	A*	051	09	09	101	09	09	151	43	RCL	201	43	RCL	250	43	RCL	
002	47	CMS	052	92	RTN	102	39	CDS	152	01	01	202	04	04	251	04	04	
003	42	STD	053	76	LBL	103	65	*	153	75	-	203	54	)	252	55	+	
004	00	00	054	19	D*	104	43	RCL	154	43	RCL	204	22	INV	253	43	RCL	
005	01	1	055	42	STD	105	08	08	155	04	04	205	30	TAN	254	00	00	
006	42	STD	056	09	09	106	54	)	156	65	*	206	42	STD	255	94	+/-	
007	01	01	057	53	(	107	42	STD	157	43	RCL	207	09	09	256	54	)	
008	42	STD	058	43	RCL	108	04	04	158	02	02	208	43	RCL	257	42	STD	
009	04	04	059	09	09	109	53	(	159	54	)	209	04	04	258	07	07	
010	60	DEG	060	65	*	110	43	RCL	160	55	+	210	77	GE	259	53	(	
011	92	RTN	061	43	RCL	111	09	09	161	43	RCL	211	85	+	260	43	RCL	
012	76	LBL	062	00	00	112	38	SIN	162	09	09	212	01	1	261	05	05	
013	14	D	063	65	*	113	65	*	163	54	)	213	08	8	262	55	+	
014	42	STD	064	43	RCL	114	43	RCL	164	42	STD	214	00	0	263	43	RCL	
015	09	09	065	04	04	115	08	08	165	07	07	215	22	INV	264	00	00	
016	53	(	066	85	+	116	54	)	166	53	(	216	44	SUM	265	54	)	
017	43	RCL	067	43	RCL	117	42	STD	167	53	(	217	09	09	266	42	STD	
018	09	09	068	05	05	118	05	05	168	43	RCL	218	76	LBL	267	04	04	
019	65	*	069	54	)	119	76	LBL	169	04	04	219	85	+	268	43	RCL	
020	43	RCL	070	42	STD	120	10	E*	170	65	*	220	43	RCL	269	07	07	
021	00	00	071	07	07	121	53	(	171	43	RCL	221	09	09	270	42	STD	
022	65	*	072	53	(	122	43	RCL	172	01	01	222	32	X <sup>1</sup> T	271	05	05	
023	43	RCL	073	43	RCL	123	04	04	173	85	+	223	53	(	272	92	RTN	
024	01	01	074	04	04	124	85	+	174	43	RCL	224	53	(	273	76	LBL	
025	85	+	075	75	-	125	01	1	175	05	05	225	43	RCL	274	17	B*	
026	43	RCL	076	43	RCL	126	54	)	176	65	*	226	04	04	275	53	(	
027	02	02	077	09	09	127	42	STD	177	43	RCL	227	33	X <sup>2</sup>	276	43	RCL	
028	54	)	078	65	*	128	01	01	178	02	02	228	85	+	277	04	04	
029	42	STD	079	43	RCL	129	43	RCL	179	54	)	229	43	RCL	278	65	*	
030	07	07	080	00	00	130	05	05	180	55	+	230	05	05	279	43	RCL	
031	53	(	081	65	*	131	42	STD	181	43	RCL	231	33	X <sup>2</sup>	280	00	00	
032	43	RCL	082	43	RCL	132	02	02	182	09	09	232	54	)	281	54	)	
033	01	01	083	05	05	133	76	LBL	183	54	)	233	34	FX	282	42	STD	
034	75	-	084	54	)	134	15	E	184	42	STD	234	28	LOG	283	07	07	
035	43	RCL	085	42	STD	135	53	(	185	04	04	235	65	*	284	53	(	
036	09	09	086	04	04	136	43	RCL	186	43	RCL	236	02	2	285	43	RCL	
037	65	*	087	43	RCL	137	01	01	187	07	07	237	00	0	286	05	05	
038	43	RCL	088	07	07	138	33	X <sup>2</sup>	188	42	STD	238	54	)	287	94	+/-	
039	00	00	089	42	STD	139	85	+	189	05	05	239	92	RTN	288	65	*	
040	65	*	090	05	05	140	43	RCL	190	01	1	240	76	LBL	289	43	RCL	
041	43	RCL	091	43	RCL	141	02	02	191	42	STD	241	13	C	290	00	00	
042	02	02	092	09	09	142	33	X <sup>2</sup>	192	01	01	242	49	PRD	291	54	)	
043	54	)	093	92	RTN	143	54	)	193	00	0	243	04	04	292	42	STD	
044	42	STD	094	76	LBL	144	42	STD	194	42	STD	244	49	PRD	293	04	04	
045	01	01	095	18	C*	145	09	09	195	02	02	245	05	05	294	43	RCL	
046	43	RCL	096	42	STD	146	53	(	196	32	X <sup>1</sup> T	246	92	RTN	295	07	07	
047	07	07	097	08	08	147	53	(	197	53	(	247	76	LBL	296	42	STD	
048	42	STD	098	53	(	148	43	RCL	198	43	RCL	248	12	B	297	05	05	
049	02	02	099	32	X <sup>1</sup> T	149	05	05	199	05	05				298	92	RTN	
															299	00	0	
															Beginn	300	76	LBL
															des HP	301	11	A